近畿大学医学部（前期）2013年度入学試験　解答速報　数学

平成２５年　1月２７日　実施

$\boxed{1}$ xy 平面に正三角形 ABC があり，3 頂点の座標はそれぞれ A$(0,\ \sqrt{3})$, B$(-1,\ 0)$, C$(1,\ 0)$ となっている．線分 BC を $1:2$ に内分する点を D，線分 CA の中点を E とする．また P は辺 AB 上を動く点とし，Q は辺 AC 上を動く点とする．

(1) 直線 AB に関して D と対称な点 T の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ である．

(2) 線分 TE を $s:1-s$ の比に内分する点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{BR}}=m\overrightarrow{\mathrm{BA}}+n\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と表すと $m=\boxed{\text{ウ}}$，$n=\boxed{\text{エ}}$ となる．ただし $m,\ n$ は s の 1 次式である．また $s=\boxed{\text{オ}}$ のとき R は線分 AB 上にある．

(3) $\mathrm{DP}+\mathrm{PE}$ の最小値は $\boxed{\text{カ}}$ である．またそのとき $\mathrm{BP}=\boxed{\text{キ}}$ となる．

(4) $\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値は $\boxed{\text{ク}}$ である．またそのとき $\tan\angle\mathrm{BPQ}=\boxed{\text{ケ}}$ となる．

解答

ア．$-\dfrac{4}{3}$　イ．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　ウ．$\dfrac{1}{6}s+\dfrac{1}{3}$　エ．$\dfrac{5}{6}s-\dfrac{1}{3}$　オ．$\dfrac{2}{5}$　カ．$\dfrac{\sqrt{31}}{3}$　キ．$\dfrac{4}{5}$　ク．$\dfrac{2}{3}\sqrt{21}$　ケ．$-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

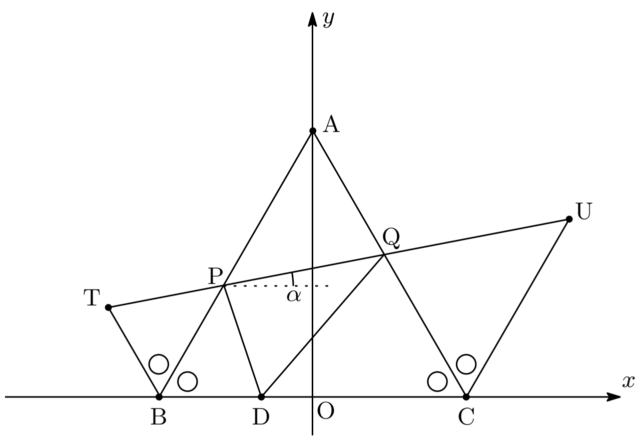
解説

(1) T$(p,\ q)$ とおいて「DT ⊥ AB」かつ「TD の中点が直線 AB 上にある」ことから求めればよいが，$\angle\mathrm{TBD}=120^\circ$ と $\mathrm{TB}=\dfrac{2}{3}$ から求めるのが早い．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BT}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}})$, $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})$ を $\overrightarrow{\mathrm{BR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{BT}}+s\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ に代入して整理すると $\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\left(\dfrac{1}{6}s+\dfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\left(\dfrac{5}{6}s-\dfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$．また R が線分 AB 上にあるとき $\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ における $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の係数が 0 なので $s=\dfrac{2}{5}$．

(3) $\mathrm{DP}+\mathrm{PE}=\mathrm{TP}+\mathrm{PE}$ であり，この最小値は線分 TE の長さに等しいからこの長さを求めればよい．またこのとき P は AB と TE の交点であるから，(2) の後半で求めた $s=\dfrac{2}{5}$ より $m=\dfrac{2}{5}$ となるので，$\mathrm{BP}=2\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{5}$．

(4) 直線 AC に関して D と対称な点を U とすると，その座標は (1) と同様にして $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ とわかる．$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}=\mathrm{TP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QU}$ であり，この最小値は線分 TU の長さに等しいからこの長さを求めればよい．またこのとき $\overrightarrow{\mathrm{TU}}=\left(3,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ でありこのベクトルと x 軸の正の向きのなす鋭角を α とすると $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ となる．よって $\tan\angle\mathrm{BPQ}=\tan(\alpha+120^\circ)$ を加法定理で展開するとよい．



(4) の参考図　(○は 60°)

$\boxed{\mathbf{2}}$ 　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC がある．辺 OA を $1:2$ の比に内分する点を P，辺 OB の中点を Q，R を辺 OC 上の点とするとき，

(1)　線分 PQ の長さを求めよ．

(2)　三角形 PQC の面積を求めよ．

(3)　R が辺 OC 上を動くとき，三角形 PQR の面積の最小値を求めよ．

(4)　頂点 O から三角形 PQR を含む平面に垂線 OH を引く．点 H が三角形 PQR の内部にあるとき，$\mathrm{OR}=r$ の取りうる値の範囲を求めよ．ただし三角形の内部とはその周を含まないものとする．

解答

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ とおく．$|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|=1,\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=\dfrac{1}{2}$ である．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}$ より $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}$．従って $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{b}|^2-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\dfrac{1}{9}|\overrightarrow{b}|^2=\dfrac{7}{36}$ より $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$．

(2) と (3) は同時に解くことにする．$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=r\overrightarrow{c}\ (0\leqq r\leqq 1)$ とおく．$r=1$ のとき R は C に一致する．

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=r\overrightarrow{c}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}$ なので，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=r^2|\overrightarrow{c}|^2-\dfrac{2r}{3}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\dfrac{1}{9}|\overrightarrow{a}|^2=\dfrac{9r^2-3r+1}{9}$,

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}\right)\cdot\left(r\overrightarrow{c}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}\right)=\dfrac{r}{2}\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-\dfrac{r}{3}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\dfrac{1}{9}|\overrightarrow{a}|^2=\dfrac{3r+1}{36}$,

$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{36}\cdot\dfrac{9r^2-3r+1}{9}-\left(\dfrac{3r+1}{36}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{27r^2-10r+3}}{24}$.

これに $r=1$ を代入して $\triangle\mathrm{PQC}=\dfrac{\sqrt{27-10+3}}{24}=\dfrac{\sqrt{5}}{12}$. ((2) の答)

また $27r^2-10r+3=27\left(r-\dfrac{5}{27}\right)^2+\dfrac{56}{27}$ であるから，$\triangle\mathrm{PQR}$ は $r=\dfrac{5}{27}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{24}\sqrt{\dfrac{56}{27}}=\dfrac{\sqrt{42}}{108}$ をとる. ((3) の答)

(4)　上と同様 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=r\overrightarrow{c}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{a}+l\overrightarrow{b}+m\overrightarrow{c}$ とおく．

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0 \iff \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=0 \iff \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が成り立つ．同様に $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ も成り立つ．

ここで $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\left(k+\dfrac{l}{2}+\dfrac{m}{2}\right), \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k}{2}+l+\dfrac{m}{2}\right), \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=r\left(\dfrac{k}{2}+\dfrac{l}{2}+m\right)$ なので，連立方程式を解くと $k:l:m=(7r-1):(3r-1):(3-5r)$ が得られる．H が三角形 PQR の内部にあるための必要十分条件は，$k,\ l,\ m$ がすべて正であることだが，図形的に考えて $k,\ l,\ m$ がすべて負になることはありえないので，$k,\ l,\ m$ がすべて同符号であればよい．これより答は $\dfrac{1}{3}<r<\dfrac{3}{5}$ である．

3 定義域を $0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする関数 $f(x) = |\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 1|$ がある．$t = \sin x + \cos x$ とおき $f(x)$ を t で表した関数を $g(t)$ とおく．

(1) 関数 $g(t)$ を求めよ．

(2) t が取りうる値の範囲を求めよ．

(3) $f(x)$ が取りうる値の範囲を求めよ．

(4) 方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数 l を k の値で場合分けして求めよ．

解答

(1) $t^2 = 1 + \sin 2x$ となるので $f(x)$ に代入して，$g(t) = |t(t-2)|$

(2) $t = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

(3) $y = g(t)$ のグラフを (2) の範囲で描くと図 1 のようになるので，$g(-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}+2$，$g(1) = 1$，$g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-2$ より，

$$0 \leqq f(x) \leqq 2\sqrt{2}+2$$

(4) $t = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフを描くと図 2 のようになる．図 1 とあわせて考えると，

$k < 0$ のとき：$l = 0$，　$k = 0$ のとき：$l = 2$，　$0 < k < 2\sqrt{2}-2$ のとき：$l = 4$，
$k = 2\sqrt{2}-2$ のとき：$l = 5$，　$2\sqrt{2}-2 < k < 1$ のとき：$l = 6$，　$k = 1$ のとき：$l = 5$，
$1 < k < 2\sqrt{2}+2$ のとき：$l = 2$，　$k = 2\sqrt{2}+2$ のとき：$l = 1$，　$k > 2\sqrt{2}+2$ のとき：$l = 0$

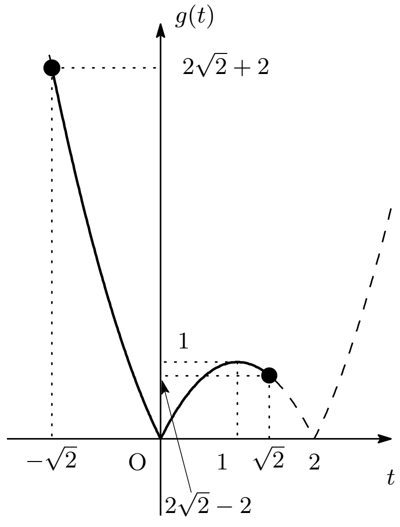


図 1

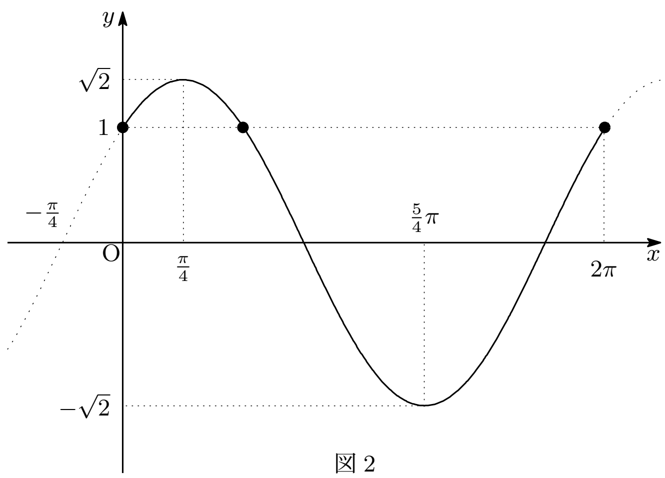


図 2

近大前期　2013 講評

$\boxed{\mathbf{1}}$ 図形問題 (直線に関する対称点の応用)
レベルは標準
典型的な出題だが図形的な処理や tan の扱いに慣れていないとかなり手間取るだろう.
ベクトルによる誘導がややうざったい. (相似を利用するのが早い)

$\boxed{\mathbf{2}}$ 空間ベクトル (正四面体)
レベルは標準〜難
(3) までは標準レベルの典型題だが計算が煩雑.
(4) が難しい. $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ などに気づかなければ無理だろう.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 合成関数の解の個数
レベルは標準
典型題. このテーマは去年も出たが今回の方が少し易しい.
t と x の対応関係が煩雑で注意力が要るが何とかここで満点が欲しい.

例年より点が取りにくい. 全体的に典型的出題といえるが, どれも処理力を必要とする. やや難度も高く数学を苦手とする生徒にはかなりハードルが高かったのではないか. 特に大問 2 の (4) は難問. ここで時間を使いすぎると失敗する. 他の問題に時間をまわすべきである. トータルのボーダーは 6 割程度か.

医歯学部進学予備校　メビオ
〒 540–0033　大阪市中央区石町　2–3–12　ベルヴォアア天満橋
TEL 06–6946–0109　FAX 06–6941–9416　URL http://www.mebio.co.jp/
MeBio Scholastics