近畿大学医学部（前期）2012年度入学試験　解答速報　数学

平成２４年　１月２９日　実施

1

関数 $f(x)$ が，すべての実数 x に対して　$f(x)=2x^2-14x+\int_0^3 f(x)dx$　をみたしているとき

(1)　$\int_0^3 f(x) = \boxed{\text{ア}}$ である．

(2)　方程式 $f(x)=0$ の解 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ の値は，$x_1=\boxed{\text{イ}}$，$x_2=\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3)　a を $a \geqq 0$ をみたす実数とし，区間 $a \leqq x \leqq a+1$ における $f(x)$ の最小値と最大値を，a の関数として，それぞれ，$m(a)$, $M(a)$ とする．このとき

$m(a)$ が一定値となる a の区間は $\boxed{\text{エ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{オ}}$ であり，この区間で $m(a)=\boxed{\text{カ}}$ である．

また，$M(a) \leqq 6$ をみたす a の区間は $\boxed{\text{キ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{ク}}$ である．

解答

ア．$\dfrac{45}{2}$　イ．$\dfrac{5}{2}$　ウ．$\dfrac{9}{2}$　エ．$\dfrac{5}{2}$　オ．$\dfrac{7}{2}$　カ．-2　キ．$\dfrac{3}{2}$　ク．$\dfrac{9}{2}$

解説

(1)　$\int_0^3 f(x)dx$ は定数である．これを A とおくと $f(x)=2x^2-14x+A$ となるから $A=\int_0^3(2x^2-14x+A)dx = \left[\dfrac{2}{3}x^3-7x^2+Ax\right]_0^3=-45+3A$ となるので $\int_0^3 f(x)dx = A = \dfrac{45}{2}$.

(2)　$f(x)=2x^2-14x+\dfrac{45}{2}=2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)\left(x-\dfrac{9}{2}\right)$ なので $x_1=\dfrac{5}{2}$, $x_2=\dfrac{9}{2}$.

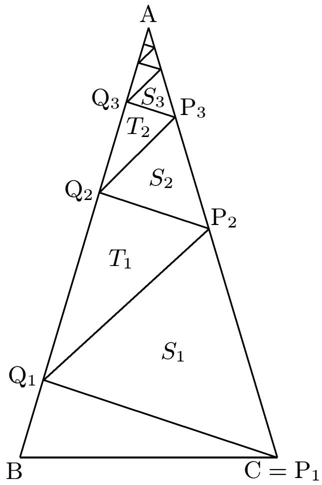
(3)　$f(x)=2\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2-2$ より $m(a)$ が一定となるのは $a \leqq \dfrac{7}{2} \leqq a+1$ つまり $\dfrac{5}{2} \leqq a \leqq \dfrac{7}{2}$ のときであり $m(a)=-2$ である．また $y=f(x)$ と $y=6$ の交点において $x=\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{11}{2}$ であるので $M(a) \leqq 6$ となるためには $a \geqq \dfrac{3}{2}$ かつ $a+1 \leqq \dfrac{11}{2}$ より $\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq \dfrac{9}{2}$.

2

$\angle \mathrm{A}=30^\circ$, $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=4$ をみたす $\triangle\mathrm{ABC}$ において，点 C を点 P_1 として，$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ が正三角形になるように，辺 AB 上に点 Q_1，辺 AC 上に点 P_2 をとる．

次に，図のように，$\triangle\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_3$ が正三角形になるように，辺 AB 上に点 Q_2，辺 AC 上に点 P_3 をとる．以下同様にして，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が正三角形になるように，辺 AB 上に点 Q_n，辺 AC 上に点 P_{n+1} をとる．$(n=1, 2, 3, \cdots)$

$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n，$\triangle\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}$ の面積を T_n とする．



(1)　BC と $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを，二重根号を用いない形で求めよ．

(2)　S_1, T_1 の値を求めよ．

(3)　S_n を n を用いて表せ．また，$S_n < \dfrac{1}{1000}$ をみたす最小の n の値を求めよ．

(4)　T_n を n を用いて表せ．また，和 $\sum_{n=1}^{5} T_n$ の値を求めよ．

解答

答は順に，(1)　$2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$，2　　(2)　$\sqrt{3}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$，7　　(4)　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$，$\dfrac{341\sqrt{3}}{512}$

解説

(1)　余弦定理により，$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos 30^\circ=4^2+4^2-2\cdot 4\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=32-16\sqrt{3}$．したがって，$\mathrm{BC}=\sqrt{32-16\sqrt{3}}=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$．次に，$\angle\mathrm{BAC}=30^\circ$，$\angle\mathrm{AP_1Q_1}=60^\circ$ より線分 $\mathrm{P_1Q_1}$ は辺 AB の垂線であることがわかるので，$\mathrm{P_1P_2}=\mathrm{P_1Q_1}=\mathrm{AC}\sin 30^\circ=2$

(2)　$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3}$．また，$\mathrm{Q_1P_2}=2$，$\angle\mathrm{P_2Q_1Q_2}=30^\circ$，$\angle\mathrm{P_2Q_2Q_1}=90^\circ$ なので，$\mathrm{Q_1Q_2}=\sqrt{3}$，$\mathrm{P_2Q_2}=1$ などがわかる．よって，$T_1=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　(2) の議論から，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ と $\triangle\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ は相似比が $2:1$ の正三角形であるから，面積比は $4:1$ である．すなわち，$\{S_n\}$ は初項 $\sqrt{3}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列となるので，$S_n=\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ となる．$S_n<\dfrac{1}{1000}\iff\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}<\dfrac{1}{1000}$ であるが，$n=6$ のとき，左辺 $=\dfrac{\sqrt{3}}{1024}>\dfrac{1}{1000}$ であり，$n=7$ のとき 左辺 $=\dfrac{\sqrt{3}}{4096}<\dfrac{1}{1000}$ であるから，題意をみたす最小の n の値は $n=7$ である．

(4)　$\{T_n\}$ も $\{S_n\}$ と同様に公比が $\dfrac{1}{4}$ の等比数列である．初項 $T_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，$T_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ であり，

$$\sum_{n=1}^{5}T_n=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\right)}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{341\sqrt{3}}{512}$$

3　p を実数の定数として，実数 x の関数を $f(x)=25^x+\dfrac{1}{25^x}+2p\left(5^x+\dfrac{1}{5^x}-1\right)+7$ とする．$t=5^x+\dfrac{1}{5^x}$ とおき，$f(x)$ を t で表した関数を $g(t)$ とおく．

(1)　関数 $g(t)$ を求めよ．

(2)　方程式 $g(t)=0$ が実数解を 1 個もつとき，p の値と解 t の値を求めよ．

(3)　方程式 $g(t)=0$ が次の条件をみたす 2 個の実数解 t_1, t_2 をもつとき，p がとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ．

a)　$t_1<2,\ t_2>2$　　b)　$t_1=2,\ t_2>2$　　c)　$2<t_1<t_2$　　d)　$t_1<t_2<2$

(4)　t を定数とみなし $t=5^x+\dfrac{1}{5^x}$ を x の方程式とみなして，方程式 $t=5^x+\dfrac{1}{5^x}$ が異なる 2 つの実数解 x をもつように t の値を定めるとき，t がとりうる値の範囲を求めよ．

(5)　方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解 x の個数を，p の値で場合分けして求めよ．

解答

(1)　$t=5^x+\dfrac{1}{5^x}$ より $t^2=(5^x)^2+2\cdot 5^x\cdot\dfrac{1}{5^x}+\dfrac{1}{(5^x)^2}=25^x+\dfrac{1}{25^x}+2$．

従って $f(x)=25^x+\dfrac{1}{25^x}+2p\left(5^x+\dfrac{1}{5^x}-1\right)+7=t^2-2+2p(t-1)+7=t^2+2pt-2p+5$．答は $g(t)=t^2+2pt-2p+5$．

(2)　t の二次方程式 $g(t)=0$ の判別式を D_g とおくと，求める条件は $\dfrac{D_g}{4}=p^2+2p-5=0$．従って $p=-1\pm\sqrt{6}$ である．

$p=-1-\sqrt{6}$ のとき重解は $t=1+\sqrt{6}$, $p=-1+\sqrt{6}$ のとき重解は $t=1-\sqrt{6}$.

(3)　$y=g(t)$ のグラフは下に凸の放物線であること，また $y=g(t)$ の軸の方程式は $t=-p$ であることに注意しておく．

a)　$g(2)<0$ が必要十分条件である．$g(2)=9+2p<0$ より $p<-\dfrac{9}{2}$.

b)　$g(2)=0$ かつ 軸 >2 が必要十分条件である．$g(2)=0$ より $p=-\dfrac{9}{2}$．このとき軸は $t=-p=\dfrac{9}{2}$ であるからこれは適する．
答は $p=-\dfrac{9}{2}$.

c)　軸 >2, 境界値 $g(2)>0$, 判別式 $\dfrac{D_g}{4}>0$ が必要十分である．
軸 $>2 \iff -p>2 \iff p<-2$, 境界値 $g(2)>0 \iff p>-\dfrac{9}{2}$, 判別式 $\dfrac{D_g}{4}>0 \iff p<-1-\sqrt{6}$ または $-1+\sqrt{6}<p$
これら三条件から答は $-\dfrac{9}{2}<p<-1-\sqrt{6}$.

d)　軸 <2, 境界値 $g(2)>0$, 判別式 $\dfrac{D_g}{4}>0$ が必要十分である．
軸 $<2 \iff -p<2 \iff p>-2$, 境界値 $g(2)>0 \iff p>-\dfrac{9}{2}$, 判別式 $\dfrac{D_g}{4}>0 \iff p<-1-\sqrt{6}$ または $-1+\sqrt{6}<p$
これら三条件から答は $-1+\sqrt{6}<p$.

(4)　$z=5^x$ とおくと，実数 x の値と正の実数 z の値が $1:1$ に対応する．従って z の方程式 $t=z+\dfrac{1}{z} \iff z^2-tz+1=0$ が異なる正の実数解を持つ条件を求めればよい．$h(z)=z^2-tz+1$ とおくと，軸 $\dfrac{t}{2}>0$ かつ 境界値 $h(0)>0$ かつ 判別式 $D_h=t^2-4>0$ であるから，答は $t>2$.

(5)　(i)　$D_g<0$ つまり $-1-\sqrt{6}<p<-1+\sqrt{6}$ のときは $g(t)=0$ が実数解を持たないので $f(x)=0$ も解を持たない.

(ii)　$p=-1-\sqrt{6}$ のときは $g(t)=0$ は $t=1+\sqrt{6}$ を重解にもつが，$1+\sqrt{6}>2$ であるからこれは x の 2 つの解に対応する．

(iii)　$p=-1+\sqrt{6}$ のときは $g(t)=0$ は $t=1-\sqrt{6}$ を重解にもつが，$1-\sqrt{6}<2$ であるからこれは x の解には対応しない．

(iv)　$p<-\dfrac{9}{2}$ のときは (3) の a) の場合だから x の解は 2 個.

(v)　$p=-\dfrac{9}{2}$ のときは (3) の b) の場合だから x の解は 3 個.

(vi)　$-\dfrac{9}{2}<p<-1-\sqrt{6}$ のときは (3) の c) の場合だから x の解は 4 個.

(vii)　$-1+\sqrt{6}<p$ のときは (3) の d) の場合だから x の解は 0 個.

以上より答は $\begin{cases} p<-\dfrac{9}{2} & \text{のとき}\quad 2\text{ 個} \\ p=-\dfrac{9}{2} & \text{のとき}\quad 3\text{ 個} \\ -\dfrac{9}{2}<p<-1-\sqrt{6} & \text{のとき}\quad 4\text{ 個} \\ p=-1-\sqrt{6} & \text{のとき}\quad 2\text{ 個} \\ -1-\sqrt{6}<p & \text{のとき}\quad 0\text{ 個} \end{cases}$

近大前期　2012 講評

$\boxed{\mathbf{1}}$　関数方程式，２次関数の最大最小（区間付き）

レベルはやや易～標準

とても典型的な問題で，まるでセンター試験のよう．ここは是非満点をねらいたい．

$\boxed{\mathbf{2}}$　相似な図形の面積

レベルは標準

ヘタをすると全滅の危険がある．できなかった生徒も多いのではないだろうか．決して難しい問題ではないが，大いに差がつくだろう．

$\boxed{\mathbf{3}}$　合成関数の解の個数

レベルは標準～やや難

相変わらずだが誘導が有り難迷惑な感あり．うざったらしい．

最後の問題 (5) だけは少々難しい．が，そこまでたどり着けたかどうか（時間的に）？

(5) まではかなり典型的な問題なので，誰しもそこそこ解けただろう．

全体として，新しいタイプの問題は全くなく，どの問題も一度は触れたことのある問題．ただ，量は多い．あんまり迷っている暇はないだろう．大問１と大問３の (1)～(4) は失点したくない．大問２がどれほど手が着いたか？が勝負を決めたのではないだろうか．ボーダーは７割といったところ．

医歯学部進学予備校　メビオ

〒 540–0033　大阪市中央区石町　2–3–12　ベルヴォア天満橋

TEL 06–6946–0109　FAX 06–6941–9416　URL http://www.mebio.co.jp/

MeBio Scholastics