近畿大学医学部（前期）2015 年度入学試験 解答速報 数学

平成 27 年 1 月 25 日 実施

1 a は 0 でない定数とする．２つの円 C_1： $x^2+y^2+4x-6y+9=0$, C_2： $x^2+y^2-4ax+2y+1=0$ は異なる２点 P, Q で交わっている．

(1) a の値に関係なく，C_2 が通る定点の座標は $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) a の値の範囲は $\boxed{\text{イ}}$ である．

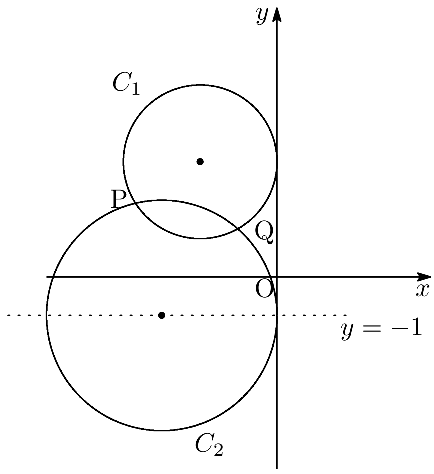
(3) 2 点 P, Q を通る直線の傾きが -3 となるとき，$a=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(4) C_1 の中心を A とおく．△APQ が正三角形となるとき，$a=$ $\boxed{\text{エ}}$ である．

解答

(1) $(0,\ -1)$　(2) $a<-1$　(3) $a=-7$　(4) $a=-9\pm 2\sqrt{15}$

解説



(1) C_2 において，a の恒等式として解くと，$(x,\ y)=(0,\ -1)$.

(2) C_1： $(x+2)^2+(y-3)^2=4$, C_2： $(x-2a)^2+(y+1)^2=4a^2$ と変形し図を描くと，円 C_2 は，y 軸と接しながら，中心 $(2a,\ -1)$ が直線 $y=-1$ 上を移動する．この C_2 が C_1 と異なる 2 点で交わるとき，中心の x 座標が負となるのは，図より明らかなので，$a<0$ であることがわかる．
よって，C_2 の半径は $-2a$ である．
これを考慮して，2 円が異なる 2 点で交わる条件 (半径の差) $<$ (中心間の距離) $<$ (半径の和) を考えると，
$|2-(-2a)|<\sqrt{(2a+2)^2+16}<2+(-2a)$.
2 乗して，$(2a+2)^2<(2a+2)^2+16<(2a-2)^2$.
左側は常に成り立つので，右側を解くと，$a<-1$.

(補足)　$a=-1$ のとき 2 円が接するのは明らかであり，また常に C_2 は $(0,\ -1)$ で y 軸に接するので，$-1<a<0$ のときは C_2 が小さすぎて C_1 とは離れ，$a<-1$ のときは C_2 は十分大きいので必ず C_1 と 2 交点をもつことが分かる．

(3) C_1, C_2 の方程式を辺々引くと，$(4+4a)x-8y+8=0$.
これは直線 PQ の方程式を表すので，傾き $\dfrac{1+a}{2}=-3$ より $a=-7$.

(4) △APQ は，1 辺の長さが 2 の正三角形となるので，点 A と直線 PQ の距離が $\sqrt{3}$ となればよい．
点と直線の距離の公式より，$\dfrac{|-2a-6|}{\sqrt{(1+a)^2+4}}=\sqrt{3}$.
分母を払って，両辺を 2 乗して解くと，$a=-9\pm 2\sqrt{15}$.

2 $\triangle$OAB に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく．

(1)　辺 OA の中点を C，辺 OB を $1:5$ に内分する点を D，線分 AD と線分 BC の交点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

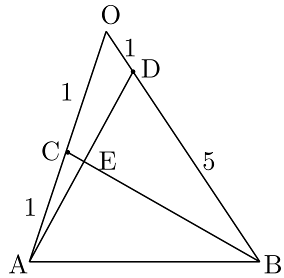
(2)　t は $0<t<\dfrac{1}{3}$ の範囲にある実数とする．辺 OA を $3t:1-3t$ に内分する点を F，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を G，線分 AG と線分 BF の交点を H とする．$\triangle$OAH の面積が $\triangle$OAB の面積の k 倍となるとき，k を t を用いて表せ．

(3)　$\triangle$OAB は正三角形とする．線分 AG と線分 BF が直角に交わるとき t の値を求めよ．

解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{5}{11}\vec{a}+\dfrac{1}{11}\vec{b}$　　(2) $k=\dfrac{t(1-3t)}{1-3t^2}$　　(3) $t=\dfrac{4-\sqrt{13}}{3}$

解説



(1)　$\triangle$AOD において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CO}}\cdot\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EA}}=1 \iff \frac{1}{1}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EA}}=1 \iff \mathrm{DE}:\mathrm{EA}=5:6.$$

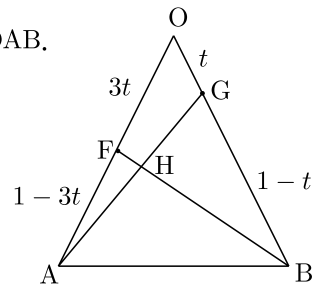
これより $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{5}{11}\vec{a}+\dfrac{1}{11}\vec{b}$.

(2)　$\triangle$AOG において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FO}}\cdot\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BG}}\cdot\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{HA}}=1 \iff \frac{1-3t}{3t}\cdot\frac{1}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{HA}}=1 \iff \mathrm{GH}:\mathrm{HA}=3t(1-t):1-3t.$$

よって $\triangle\mathrm{OAH}=\triangle\mathrm{OAB}\times t\times\dfrac{1-3t}{3t(1-t)+(1-3t)}=\dfrac{t(1-3t)}{1-3t^2}\triangle\mathrm{OAB}=k\triangle\mathrm{OAB}$.

これより $k=\dfrac{t(1-3t)}{1-3t^2}$.



(3)　正三角形 OAB において $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ としても差し支えない．

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=t\vec{b}-\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BF}}=3t\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になればよいので，

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BF}}=(-\vec{a}+t\vec{b})\cdot(3t\vec{a}-\vec{b})=0$.

展開整理すると $3t^2-8t+1=0$ となり，$0<t<\dfrac{1}{3}$ を考慮して $t=\dfrac{4-\sqrt{13}}{3}$.

3 数列 1, 1, 4, 1, 4, 7, 1, 4, 7, 10, 1, 4, 7, 10, 13, 1, $\cdots$ について，次の問に答えよ．

(1) 第 200 項を求めよ．

(2) 初項から第 200 項までの和を求めよ．

(3) 初項から第 n 項までの和を S_n とする．$5000 < S_n < 6000$ を満たす n はいくつあるか，その個数を求めよ．

解答

次のように群を与える．

$$1 \mid 1,\ 4 \mid 1,\ 4,\ 7 \mid 1,\ 4,\ 7,\ 10 \mid 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13 \mid 1,\ \cdots$$

(1) 第 n 群の最後の項は，この数列の先頭から $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$ 番目にある．

$n=19$ のとき $\dfrac{1}{2}\cdot 19\cdot 20 = 190$,

$n=20$ のとき $\dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot 21 = 210$ より，

第 200 項は第 20 群の 10 番目にある．よってその値は，$1+(10-1)\cdot 3 = \mathbf{28}$.

(2) 第 n 群は初項 1，公差 3，項数 n の等差数列なので，第 n 群に属する項の和は

$$\frac{1}{2}\{2\cdot 1+(n-1)\cdot 3\}n = \frac{1}{2}(3n-1)n$$

となっている．第 1 群から第 19 群までの総和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{19}\frac{1}{2}(3k-1)k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{19}(3k^2-k)\\ &= \frac{1}{2}\left(3\cdot\frac{1}{6}\cdot 19\cdot 20\cdot 39 - \frac{1}{2}\cdot 19\cdot 20\right)\\ &= \frac{1}{4}\cdot 19\cdot 20\cdot(39-1) = 3610\end{aligned}$$

また，第 20 群のはじめの 10 項の和は，

$$1+4+7+\cdots+28 = \frac{1}{2}\cdot(1+28)\cdot 10 = 145$$

したがって，初項から第 200 項までの和は，

$$3610+145 = \mathbf{3755}.$$

(3) 第 1 群から第 N 群までの総和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}(3k-1)k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(3k^2-k)\\ &= \frac{1}{2}\left\{3\cdot\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) - \frac{1}{2}N(N+1)\right\}\\ &= \frac{1}{4}N(N+1)(2N+1-1) = \frac{1}{2}N^2(N+1)\end{aligned}$$

である．

$N=21$ のとき $\dfrac{1}{2}\cdot 21^2\cdot 22 = 4851$,

$N=22$ のとき $\dfrac{1}{2}\cdot 22^2\cdot 23 = 5566$,

$N=23$ のとき $\dfrac{1}{2}\cdot 23^2\cdot 24 = 6348$ となっているので，

$5000 < S_n < 6000$ を満たすのは第 22 群の途中から第 23 群の途中までだとわかる．

ここで，各群のはじめの項から k 番目の項までの和は

$$1+4+7+\cdots+(3k-2)=\frac{1}{2}(3k-1)k$$

である．$5000-4851=149$ より，第 22 群のはじめの項から何番目までの項を足せば 149 を超えるかを調べる．

$k=10$ のとき $\frac{1}{2}\cdot 29\cdot 10=145$,

$k=11$ のとき $\frac{1}{2}\cdot 32\cdot 11=176$ より，

第 22 群の 11 番目の項ではじめて $S_n>5000$ となることがわかった．

また，$6000-5566=434$ より，第 23 群のはじめの項から何番目までの項を足せば 434 以上になるかを調べる．

$k=17$ のとき $\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 17=425$,

$k=18$ のとき $\frac{1}{2}\cdot 53\cdot 18=477$ より，

第 23 群の 17 番目まで $S_n<6000$ となっていることがわかった．

以上より，$5000<S_n<6000$ を満たすのは，第 22 群の 11 番目より第 23 群の 17 番目までなので，

求める個数は，$(22-11+1)+17=$ **29 個** である．

講評：

$\boxed{1}$ 標準的な問題であるが，2 円の交点を通る直線や弦の長さについての基本的なテクニックが身についていないと時間がかかってしまうだろう．

$\boxed{2}$ ベクトルの基本典型題で，是非とも満点が欲しい．メネラウスやおもりの定理で短時間に済ませられたかどうかが，次の 3 番の出来に影響すると思われる．

$\boxed{3}$ (1)(2) は群数列の典型的な問題なので確実に正解したい．(3) は方針が難しいわけではないが，計算が非常に面倒で，時間内に正解するのは難しい．

昨年と同様，問題ごとの難易がはっきりしており，点数に差がつきにくいはず．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$(1)(2) は取りこぼせない．$\boxed{3}$(3) はしっかり記述して部分点を稼ぐ．ボーダーラインは 9 割と予想する．