近畿大学医学部（前期）2014年度入学試験　解答速報　数学

平成２６年　１月２６日　実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ 円 C_1 に内接する四角形 ABCD があり，2 つの辺の長さが $\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{BC}=2$ となっている．$\angle\mathrm{ABC}=\theta$ とおく．次の問に答えよ．

(1)　$\mathrm{AC}^2=m+n\cos\theta$ と表すと $m=$ $\boxed{\text{ア}}$, $n=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．ただし，m, n は整数とする．

(2)　四角形 ABCD の残りの辺の長さが $\mathrm{CD}=2$, $\mathrm{DA}=4$ となっている．

このとき，$\cos\theta=$ $\boxed{\text{ウ}}$, $\mathrm{AC}=$ $\boxed{\text{エ}}$ である．

また，円 C_1 の半径は $\boxed{\text{オ}}$，四角形 ABCD の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である．

解答

ア．5　イ．-4　ウ．$-\dfrac{3}{4}$　エ．$2\sqrt{2}$　オ．$\dfrac{4}{7}\sqrt{14}$　カ．$\dfrac{5}{4}\sqrt{7}$

解説

(1) 三角形 ABC に余弦定理を適用して，

$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\theta=5-4\cos\theta$

(2) 三角形 ACD に余弦定理を適用して，

$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\cos(\pi-\theta)=20+16\cos\theta.$

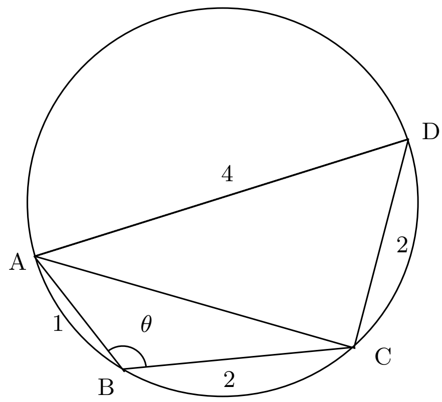
これと (1) より $\cos\theta=-\dfrac{3}{4}$，$\mathrm{AC}=2\sqrt{2}.$

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ と正弦定理より $\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\theta}=2R$ が成り立つので

$R=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sin\theta}=\dfrac{4}{7}\sqrt{14}.$

四角形 ABCD の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD} &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\sin(\pi-\theta)\\ &= \frac{\sqrt{7}}{4}+\sqrt{7}=\frac{5}{4}\sqrt{7}\end{aligned}$$



2 s を $0 < s < 1$ の範囲にある実数とする．$\triangle\mathrm{ABC}$ において，辺 AC を $2:3$ に内分する点を D，辺 BC を $s:1-s$ に内分する点を E とする．また線分 BD と線分 AE の交点を F とする．次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = k\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおく．k を s を用いて表せ．

(2) $\triangle\mathrm{AFD}$ の面積が $\triangle\mathrm{EFB}$ の面積の 2 倍になるように s を定めよ．

(3) $\mathrm{AB} = 3,\ \mathrm{AC} = 2,\ \angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{AE}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるように s を定めよ．

解答

(1) メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DA}} = 1 \iff \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FE}}\cdot\frac{s}{1}\cdot\frac{3}{2} = 1$$

したがって $\mathrm{AF}:\mathrm{FE} = 2:3s$ となるので，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \dfrac{2}{3s+2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ がわかる．したがって $k = \boldsymbol{\dfrac{2}{3s+2}}$

(2) メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EB}} = 1 \iff \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FD}}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1-s}{s} = 1$$

したがって $\mathrm{BF}:\mathrm{FD} = 5s:2(1-s)$ である．題意より

$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{AFD}\ の面積) = 2\,(\triangle\mathrm{EFB}\ の面積) &\iff \mathrm{FA}\cdot\mathrm{FD} = 2\mathrm{FB}\cdot\mathrm{FE} \iff 2\cdot 2(1-s) = 2\cdot 5s\cdot 3s \\ &\iff 15s^2 + 2s - 2 = 0 \iff s = \frac{-1\pm\sqrt{31}}{15}\end{aligned}$$

$0 < s < 1$ より $s = \boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{31}}{15}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos 60^\circ = 3$ である．$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ より

$$\begin{aligned}\{(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = 0 &\iff (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} - (1-s)|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + s|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\ &\iff 3(1-s) - 9(1-s) + 4s - 3s = 0 \\ &\iff s = \boldsymbol{\frac{6}{7}}\end{aligned}$$

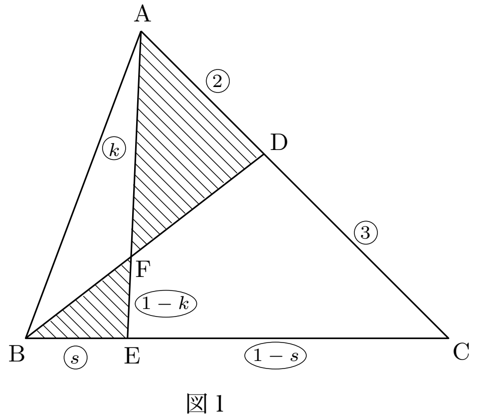


図 1

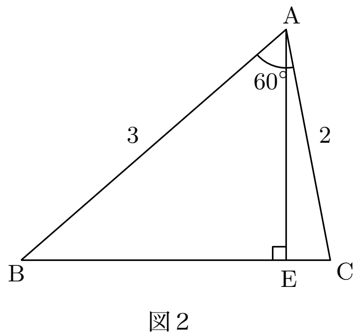


図 2

3 xy 平面上の点 P の x 座標，y 座標をそれぞれ P_x, P_y と書く．P_x, P_y がともに整数であるような点 P を格子点という．次の問に答えよ．

(1) 原点 O と点 A(18, 12) を結ぶ線分 OA がある．線分 OA 上にある格子点の個数を求めよ．ただし両端 O，A も線分 OA 上の点とする．

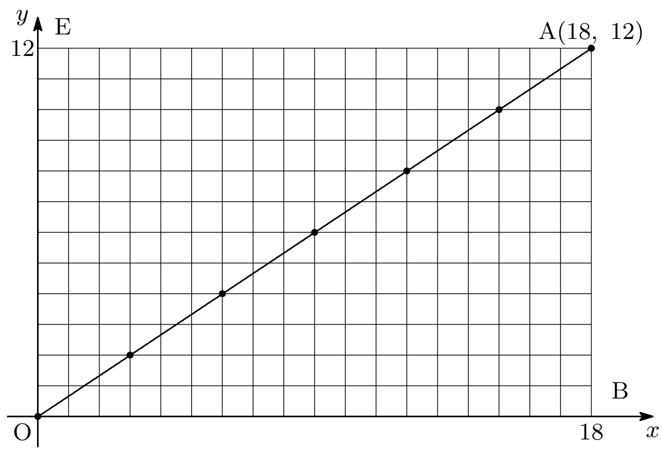
(2) O，A と点 B(18, 0) を頂点とする △OAB の周または内部にある格子点の個数を求めよ．

(3) n を正の整数とする．2 点 C(n, 0), D(0, n) を考える．格子点 P が △OCD の周または内部を動くとき P_x の総和を m_1 とおく．また，$|P_x - P_y|$ の総和を n が偶数のとき m_2，n が奇数のとき m_3 とする．m_1, m_2, m_3 を n の式で表せ．ただし解答は $an^3 + bn^2 + cn + d$ のように n の次数について整理し，降べきの順（次数の高い順）に書くこと．

解答

(1) 線分 OA の方程式は $y = \frac{2}{3}x \quad (0 \leqq x \leqq 18)$ なので，線分 OA 上の格子点は，(0, 0), (3, 2), (6, 4), (9, 6), $\cdots$, (18, 12) の **7** 個.

(2) E(0, 12) とおく．長方形 OBAE の周および内部の格子点の総数は，$19 \times 13 = 247$ 個である．これと (1) の解を利用すると，求める格子点の個数は，$\frac{247-7}{2} + 7 = \mathbf{127}$ 個（右図参照）.



(3) 線分 CD の方程式は $y = -x + n \quad (0 \leqq x \leqq n)$ である.

まず最初に，m_1 から求めよう.
$x = k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 上の格子点の個数は $-k + n + 1$ 個なので（図 1 参照），求める総和 m_1 は,

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \sum_{k=0}^{n} k(-k+n+1) = \sum_{k=0}^{n} \{-k^2 + (n+1)k\} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n}
\end{aligned}
$$

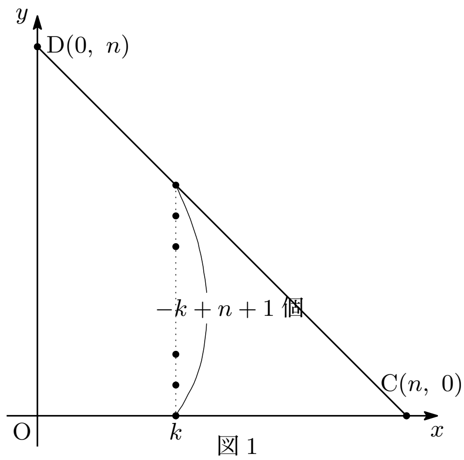


図 1

m_2, m_3 を求める.
直線 $y = x$ 上の点については $P_x = P_y$ が成り立つことと対称性によって，直線 $y = x$ の下側の領域 ($P_x > P_y$) について調べて 2 倍すればよい.

(i) n が偶数のとき

$x+y=n$ と $y=k$ の交点は $(n-k,\ k)$ $\left(0 \leqq k \leqq \dfrac{n}{2}\right)$ なので，

$y=k$ 上の格子点は

$$(k+1,\ k),\ (k+2,\ k),\ \cdots,\ (n-k,\ k)$$

であり，$|\mathrm{P}_x-\mathrm{P}_y|$ の値は

$$1,\ 2,\ \cdots,\ n-2k$$

その和は

$$\frac{1}{2}(n-2k+1)(n-2k)$$

したがって，

$$m_2 = 2\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2}(n-2k+1)(n-2k) = \boldsymbol{\frac{1}{6}n^3+\frac{3}{4}n^2+\frac{5}{6}n}$$

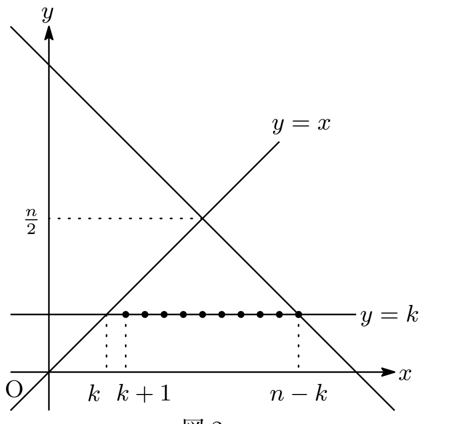


図 2

(ii) n が奇数のとき

同様にして，

$$m_3 = 2\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2}(n-2k+1)(n-2k) = \boldsymbol{\frac{1}{6}n^3+\frac{3}{4}n^2+\frac{5}{6}n+\frac{1}{4}}$$

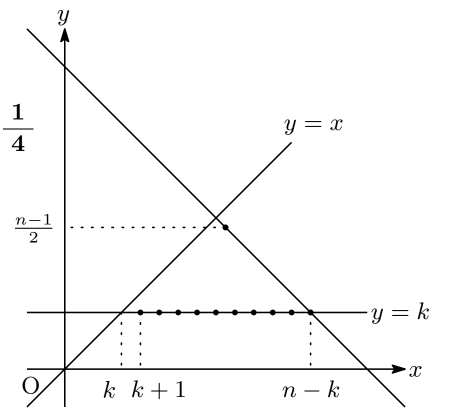


図 3

$\boxed{m_2,\ m_3\text{ を求める別解}}$

$x-y>0$ の部分の総和を求めて，それを 2 倍する方針でいく．

$x-y=k \Leftrightarrow y=x-k \quad (1 \leqq k \leqq n)$ 上の格子点の個数は，この直線と CD の交点が $\left(\dfrac{n+k}{2},\ \dfrac{n-k}{2}\right)$ であることより，$\left[\dfrac{n-k}{2}\right]+1$ 個である（図 4 参照）．ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．いわゆるガウス記号．以下，この個数を a_k とおく．

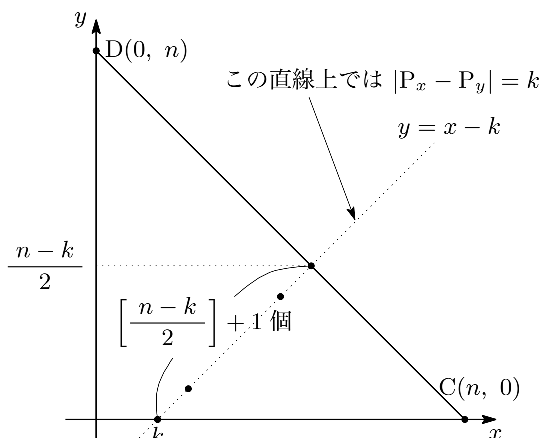


図 4

まず，n が偶数であるとき，$n=2N$（N は正の整数）とおくと，

① $k=2l-1 \quad (l=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき，

$$a_k = \left[\frac{2N-2l+1}{2}\right]+1 = \left[N-l+\frac{1}{2}\right]+1 = N-l+1$$

② $k=2l \quad (l=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき，

$$a_k = \left[\frac{2N-2l}{2}\right]+1 = [N-l]+1 = N-l+1$$

したがって①②より，求める総和 m_2 は,

$$\begin{aligned}
m_2 &= 2\sum_{k=1}^{n} ka_k = 2\left\{\sum_{l=1}^{N}(2l-1)(N-l+1) + \sum_{l=1}^{N}(2l)(N-l+1)\right\} \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{3}N(N+1)(4N+5) = \frac{1}{3}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)(2n+5) \qquad \left(\because N = \frac{n}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{4}n^2 + \frac{5}{6}n}
\end{aligned}$$

次，n が奇数であるとき，$n = 2N-1$ とおくと,

① $k = 2l-1 \quad (l = 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき,

$$a_k = \left[\frac{(2N-1)-(2l-1)}{2}\right] + 1 = [N-l] + 1 = N-l+1$$

② $k = 2l \quad (l = 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$ のとき,

$$a_k = \left[\frac{(2N-1)-2l}{2}\right] + 1 = \left[N-l-\frac{1}{2}\right] + 1 = (N-l-1)+1 = N-l$$

したがって①②より，求める総和 m_3 は,

$$\begin{aligned}
m_3 &= 2\sum_{k=1}^{n} ka_k = 2\left\{\sum_{l=1}^{N}(2l-1)(N-l+1) + \sum_{l=1}^{N-1}(2l)(N-l)\right\} \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{3}N(N+1)(4N-1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{n+1}{2}\left(\frac{n+1}{2}+1\right)(2n+2-1) \qquad \left(\because N = \frac{n+1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{12}(n+1)(n+3)(2n+1) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{4}n^2 + \frac{5}{6}n + \frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

近大前期　2014 講評

1　図形問題 (円に内接する四角形)

レベルは易

典型問題であり，ぜひとも完答したい．

2　平面ベクトル (三角形)

レベルは易

計算も簡単である．メネラウスの定理を用いてすっきりやりたい．これもぜひとも完答しておきたい．

3　格子点

レベルは難

(3) は方針も立ちにくいし，それをクリアしても計算が重く，完答は難しいだろう．

題材的にはどれも典型題ではあるが，難易の差が激しく 1，2 番は完答したが 3 番は途中までしかできなかった，という生徒が多かったろう．差が付きにくいセットだったと言える．1 番 2 番を完答して 3 番でどこまで戦えるかが勝負の分かれ目．合格には最低でも 8 割程度は必要であろう．