大阪医科大学 2015年度(後期)入学試験 解答速報 数学

2015年3月10日 実施

〔1〕 初項をそれぞれ a_1, b_1 $(0 < a_1 < b_1)$ とする数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を，$n \geqq 2$ のときは以下の式で定める：

$$a_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$$

(1) $n \geqq 2$ のとき，積 a_nb_n を a_1, b_1 を用いて表せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$ を示せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき，$b_n - a_n < \dfrac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$ を示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n^2 = a_1b_1$ を示せ。

解答

(1) すべての自然数 n について $a_n > 0$, $b_n > 0$ が帰納的に成り立つのは明らかである.

$n \geqq 2$ のとき $a_nb_n = \left(\dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}\right) \cdot \left(\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) = a_{n-1}b_{n-1}$ より，$\{a_nb_n\}$ は定数列になる．したがって，$a_nb_n = \boldsymbol{a_1b_1}$.

(2) まず $a_n < b_n$ を数学的帰納法で示す.

(I) $n = 1$ のとき明らかに成立.

(II) $n = k$ のとき $a_k < b_k$ が成立すると仮定する.

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{2a_kb_k}{a_k + b_k} = \frac{(a_k + b_k)^2 - 4a_kb_k}{2(a_k + b_k)} = \frac{(b_k - a_k)^2}{2(a_k + b_k)} > 0$$

より $n = k + 1$ で $a_{k+1} < b_{k+1}$ が成立する.

(I)(II) より，すべての自然数 n について $a_n < b_n$ が成立する.

さらに，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n - a_{n-1} = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}} - a_{n-1} = \frac{a_{n-1}(2b_{n-1} - a_{n-1} - b_{n-1})}{a_{n-1}+b_{n-1}} = \frac{a_{n-1}(b_{n-1} - a_{n-1})}{a_{n-1}+b_{n-1}} > 0$$

より $a_{n-1} < a_n$．同様に,

$$b_{n-1} - b_n = b_{n-1} - \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} > 0$$

より $b_n < b_{n-1}$．以上より題意は示された.　（証明終）

(3) $n \geqq 2$ のとき,

$$b_n - a_n = \frac{(b_{n-1} - a_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+b_{n-1})} = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \cdot \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}$$

$$< \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \quad (\because a_{n-1} > 0)$$ （証明終）

(4) (2)(3) より $0 < b_n - a_n < \dfrac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1)$ となるので，$0 < a_n < b_1$ より

$$0 < a_nb_n - {a_n}^2 < \frac{a_n}{2^{n-1}}(b_1 - a_1) < \frac{b_1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1)$$

よって挟みうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_nb_n - {a_n}^2) = 0.$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}{a_n}^2 = \lim_{n\to\infty}\{a_nb_n - (a_nb_n - {a_n}^2)\} = a_1b_1$　（証明終）

注釈

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ を示しても，$\{a_n\}$ や $\{b_n\}$ が収束することを言わなければ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}{a_n}^2 = \lim_{n\to\infty}a_nb_n$ とは言いきることができない.

大学受験の範囲から外れるが，実数の完備性より導き出される

「有界な単調数列は収束する」

という定理を用いれば，$a_{n-1} < a_n < b_1$ より $\{a_n\}$ の収束は容易に説明できる．この場合，

$$\lim_{n\to\infty}{a_n}^2 = \lim_{n\to\infty}\{a_nb_n - a_n(b_n - a_n)\} = a_1b_1 - 0 = a_1b_1$$

と示すことができる.

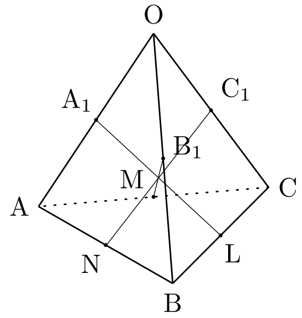
〔２〕 四面体 OABC は，各面が互いに合同な三角形である。$\triangle$ABC の辺の長さを BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ として，a，b，c は互いに異なるとする。辺 OA，OB，OC の中点をそれぞれ $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{C_1}$，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N とする。

(1) $\triangle$OAB の 2 辺 OA，OB の長さをそれぞれ a，b，c で表せ。

(2) 3 本の直線 $\mathrm{LA_1}$，$\mathrm{MB_1}$，$\mathrm{NC_1}$ は一点で交わることを示せ。

(3) 3 本の直線 $\mathrm{LA_1}$，$\mathrm{MB_1}$，$\mathrm{NC_1}$ は互いに直交することを示せ。

$\boxed{\text{解答}}$



(1) $\mathrm{AB} = c$, $\mathrm{CA} = b$ であることから $\mathrm{OA} \fallingdotseq b,\ c$ となるので $\mathrm{OA} = \boldsymbol{a}$ であり，さらに $\mathrm{OB} = \boldsymbol{b}$ も分かる．($\mathrm{OC} = c$ である)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とすると，各点の位置ベクトルは以下のようになる．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} = \frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB_1}} = \frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC_1}} = \frac{1}{2}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}),\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}),\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

したがって，$\mathrm{LA_1}$, $\mathrm{MB_1}$, $\mathrm{NC_1}$ の中点の位置ベクトルはいずれも $\frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ となるから，3 直線はこのベクトルで表される点で交わる．　（証明終）

(3) $\overrightarrow{\mathrm{LA_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} - \overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{1}{2}\{(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{c}\}$, $\overrightarrow{\mathrm{MB_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OB_1}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\frac{1}{2}\{(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c}\}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{LA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB_1}} = -\frac{1}{4}\left(|\vec{a} - \vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2\right) = -\frac{1}{4}(\mathrm{AB}^2 - \mathrm{OC}^2) = -\frac{1}{4}(c^2 - c^2) = 0$$

となるので $\mathrm{LA_1} \perp \mathrm{MB_1}$ である．同様に，

$$\overrightarrow{\mathrm{MB_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{NC_1}} = -\frac{1}{4}\left(|\vec{b} - \vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2\right) = -\frac{1}{4}(a^2 - a^2) = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{NC_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LA_1}} = -\frac{1}{4}\left(|\vec{c} - \vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2\right) = -\frac{1}{4}(b^2 - b^2) = 0$$

となるので $\mathrm{MB_1} \perp \mathrm{NC_1}$，$\mathrm{NC_1} \perp \mathrm{LA_1}$ である．　（証明終）

【参考】ここでの四面体は「等面四面体」と呼ばれるもので，各辺を対角線とする長方形を面とする直方体が存在する．(2)(3) の 3 直線は，この直方体の向かい合う 2 面の中心を結んだものになるので，(2)(3) は直ちに示される．

〔３〕 a を実数の定数として，$f(x)=2x^3-3x^2+6a(1-a)x+4a(1-a)^2$ とおく。

(1) x の関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) 3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解を持つための a の条件を求めよ。

解答

(1) $f'(x)=6(x-a)\{x-(1-a)\}$ より，

(i) $a<\dfrac{1}{2}$ のとき

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$1-a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(1-a)$	$\nearrow$

極大値 $f(a)=-a(5a-4)$.

極小値 $f(1-a)=(1-a)^2(8a-1)$.

(ii) $a>\dfrac{1}{2}$ のとき

x	$\cdots$	$1-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(1-a)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

極大値 $f(1-a)=(1-a)^2(8a-1)$.

極小値 $f(a)=-a(5a-4)$.

(iii) $a=\dfrac{1}{2}$ のとき，極値はない.

(2) $y=f(x)$ が極大値と極小値をもち，かつそれらが異符号となればよい.

極値を持つ条件は (1) より $a\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$.

極値が異符号となるのは $f(a)\cdot f(1-a)=-a(5a-4)(1-a)^2(8a-1)<0$

$\Longleftrightarrow 0<a<\dfrac{1}{8},\ \dfrac{4}{5}<a<1,\ a>1$

よって答は $\boldsymbol{0<a<\dfrac{1}{8},\ \dfrac{4}{5}<a<1,\ a>1}$

〔4〕 極座標で $r = \cos 2\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ と表される曲線 C を考える。

(1) θ に対応する C 上の点の直交座標 x，y を，θ を媒介変数として表せ。

(2) $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < 0$ または $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ の範囲の θ に対応する点における C の接線の傾きを $T(\theta)$ として，$\displaystyle\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{4}+0} T(\theta)$ と $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-0} T(\theta)$ を求めよ。

(3) 曲線 C の概形を描け。

(4) 曲線 C が囲む図形の面積を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $x(\theta) = r\cos\theta = \boldsymbol{\cos\theta\cos 2\theta}$，　$y(\theta) = r\sin\theta = \boldsymbol{\sin\theta\cos 2\theta}$

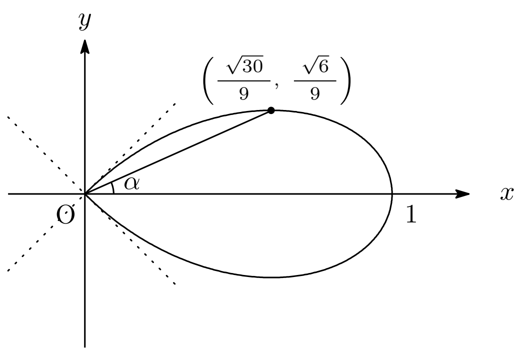
(2) $\dfrac{dx}{d\theta} = -2\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta$，　$\dfrac{dy}{d\theta} = -2\sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta$ より，

$$T(\theta) = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{-2\sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta}{-2\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta}$$ となる.

したがって，$\displaystyle\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{4}+0} T(\theta) = \boldsymbol{-1}$，$\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-0} T(\theta) = \boldsymbol{1}$

(3) $x(\theta) = x(-\theta)$，$y(\theta) = -y(-\theta)$ が成り立つから，C のグラフは x 軸に関して対称な図形となる．また $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ において，$\dfrac{dx}{d\theta} = -2\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta < 0$，$\dfrac{dy}{d\theta} = \cos\theta\left(6\cos^2\theta - 5\right)$ より増減表およびグラフの概形は以下のとおり（ただし α は $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$ を満たす角とする）.

θ	0		α		$\dfrac{\pi}{4}$
$\dfrac{dx}{d\theta}$	-0	$-$	$-$	$-$	$-\sqrt{2}$
$\dfrac{dy}{d\theta}$	1	$+$	0	$-$	$-\sqrt{2}$
$\dfrac{dy}{dx}$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
$(x,\,y)$	$(1,\,0)$	$\nwarrow$	$\left(\dfrac{\sqrt{30}}{9},\,\dfrac{\sqrt{6}}{9}\right)$	$\swarrow$	$(0,\,0)$



(4) 積和の公式を用いて，$x(\theta)=\dfrac{\cos 3\theta+\cos\theta}{2}$，$y(\theta)=\dfrac{\sin 3\theta-\sin\theta}{2}$，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{-3\sin 3\theta-\sin\theta}{2}$ としておく．求める面積を S とおくと，

$$
\begin{aligned}
S&=2\int_0^1 y\,dx=2\int_{\frac{\pi}{4}}^0 y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta=-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 3\theta-\sin\theta}{2}\cdot\frac{-3\sin 3\theta-\sin\theta}{2}\,d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\sin^2 3\theta-2\sin 3\theta\sin\theta-\sin^2\theta}{2}\,d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1-\cos 6\theta}{2}-\frac{\cos 4\theta-\cos 2\theta}{-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta-\frac{3}{4}\cos 6\theta\right)d\theta\\
&=\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{8}\sin 2\theta+\frac{1}{8}\sin 4\theta-\frac{1}{8}\sin 6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{8}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}
\end{aligned}
$$

【参考】回転方向の積分を用いると，$S=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 4\theta}{2}\,d\theta=\frac{\pi}{8}$ と手早く計算できる．

〔5〕 1から5までの5枚の番号札がある。その5枚を次のように A, B の2つの箱に分ける：

1は箱 A, 2は箱 B, 残りの番号札はそれぞれ硬貨投げを行って，表なら箱 A, 裏なら箱 B に入れる。次に，番号札をそれぞれよくかき混ぜ，2つの箱から1枚ずつ札を取り出す。

(1) 1が取り出される確率を求めよ。

(2) 1が取り出されたとき，2が取り出される条件つき確率を求めよ。

解答

事象 M, N をそれぞれ，M:「1が取り出される」，N:「2が取り出される」とし，事象 M が起こる確率を $P(M)$ などと表すことにする．また，3，4，5の番号札を○と表すことにして，それぞれの場合の確率を表にすると次のようになる．

箱 A	箱 B	左のように箱に入る確率	1が取り出される確率	2が取り出される確率
1 ○○○	2	$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	1
1 ○○	2 ○	${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1 ○	2 ○○	${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
1	2 ○○○	$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{4}$

(1) 上の表から， $P(M)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot 1=\mathbf{\frac{15}{32}}$

(2) 上の表から，

$$P(M\cap N)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

であるから，1が取り出されたとき，2が取り出される条件付き確率 $P_M(N)$ は

$$P_M(N)=\frac{P(M\cap N)}{P(M)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{15}{32}}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

講評

〔1〕（やや難）(2) で $a_n < b_n$ を数学的帰納法で証明する方向にいけるかがポイント．また (4) の極限も慎重な議論が必要.

〔2〕（易）素直に計算していくだけ.

〔3〕（易）3 次方程式の解に関する問題．これも易しい.

〔4〕（やや難）媒介変数で表示された曲線に関する問題．(4) はうまく計算しないと手間と時間がかかる.

〔5〕（易）すべての場合を調べ尽くせば簡単に答までたどり着ける.

昨年度に比べて易化した．大問の 2，3，5 は完答したいところ．ボーダーは 7 割 5 分から 8 割.