大阪医科大学 2013 年度後期入学試験　解答速報　数学

平成２５年　３月１０日　実施

[1]

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \left(\dfrac{t-1}{2},\ -\dfrac{t+3}{2}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \left(-\dfrac{t+1}{2},\ -\dfrac{t-3}{2}\right)$ なので，

$$\mathrm{AQ}: \frac{t-1}{2}(x-0) - \frac{t+3}{2}(y-1) = 0 \iff (t+3)x + (t-1)y = t-1 \quad \cdots ①$$
$$\mathrm{BP}: -\frac{t+1}{2}(x-0) - \frac{t-3}{2}(y+1) = 0 \iff (t-3)x - (t+1)y = t+1 \quad \cdots ②$$

(2)　①, ② をまとめると，$\begin{pmatrix} t+3 & t-1 \\ t-3 & -(t+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \end{pmatrix}$ となるので，これをを解いて，$\mathrm{R}\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+3},\ -\dfrac{4t}{t^2+3}\right)$

(3)　①, ② を t について整理しなおすと，

$$t(x+y-1) + 3x - y + 1 = 0 \cdots ③$$
$$t(x-y-1) - 3x - y - 1 = 0 \cdots ④$$

$$③ \times (x-y-1) - ④ \times (x+y-1) = 0 \iff 3x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0$$

(4)　$\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{t^2-1}{t^2+3}\right) = 1,\ \lim_{t\to\pm\infty}\left(-\frac{4t}{t^2+3}\right) = 0$ より $t\to\infty$ の場合も，$t\to-\infty$ の場合も $(1,\ 0)$ に近づく．

[2]

(1)　右図 1 の通り．

(2)　右図 1 における線分 PQ の長さを求めればよい．$\triangle$APR は正三角形なので $\mathrm{PR} = 1-t$ であり，また四角形 OCRQ は平行四辺形なので $\mathrm{RQ} = \mathrm{OC} = 1$ であるから $\mathrm{PQ} = (1-t)+1 = 2-t$.

(3)　l が辺 OC と交わるときの l の長さの最小値は右図 2 の展開図の線分 PQ の長さに等しいので $\mathrm{PQ} = \sqrt{3}t$ と分かる．このときと (2) のときの小さい方が l の長さの最小値となる．

図 1

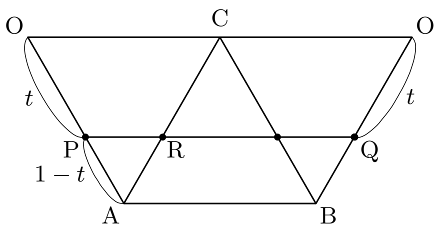
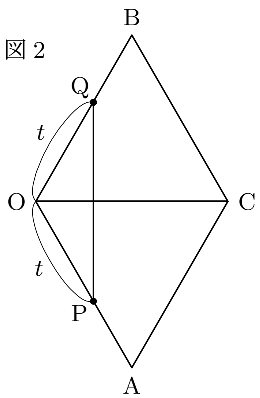


図 2



$(2-t) - \sqrt{3}t > 0$ を解くと $t < \sqrt{3}-1$ であることから答は次の通り．$\begin{cases} \sqrt{3}t & (0 < t < \sqrt{3}-1 \text{ のとき}) \\ 3-\sqrt{3} & (t = \sqrt{3}-1 \text{ のとき}) \\ 2-t & (\sqrt{3}-1 < t < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$

[3] まず $\det A = -bc \fallingdotseq 0$ より A は逆行列を持つので，l の像が 1 点になることはないことに注意しておく．

(1) (i) 原点を通らない A 不変な直線 l が $y = mx + n\ (n \fallingdotseq 0)$ とおける場合．

直線 l 上の点を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ mt+n \end{pmatrix}$ と媒介変数表示する．変換後の点は $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt+n \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} at+bmt+bn \\ ct \end{pmatrix}$ である．これが $y' = mx' + n$ を満たすので，代入して

$ct = m(at + bmt + bn) + n = amt + bm^2t + bmn + n$．これが t に関する恒等式にならないといけないので，

$$\begin{cases} bm^2 + am - c = 0 & \cdots ① \\ bmn + n = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

$b \fallingdotseq 0,\ n \fallingdotseq 0$ なので，② より $m = -\dfrac{1}{b}$ である．これが ① も満たせばよいので，代入して

$bm^2 + am - c = 0 \iff \dfrac{1}{b} - \dfrac{a}{b} - c = 0 \iff a + bc = 1$.

(ii) 原点を通らない A 不変な直線 l が $x = n\ (n \fallingdotseq 0)$ とおける場合．

直線 l 上の点を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ t \end{pmatrix}$ と媒介変数表示する．変換後の点は $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ t \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} an+bt \\ cn \end{pmatrix}$ である．これが $x' = n$ を満たすので，代入して $an + bt = n$．これは t に関する恒等式にはならないので，$x = n$ の形の A 不変な直線は存在しない．

以上 (i), (ii) より $a,\ b,\ c$ の満たすべき条件は $a + bc = 1$.

(2) (i) 原点を通る A 不変な直線 l が $y = mx$ とおける場合．

(1) (i) の議論を $n = 0$ で行うと，$bm^2 + am - c = 0 \iff bm^2 + (1-bc)m - c = 0 \iff (bm+1)(m-c) = 0 \quad \cdots ③$ が得られる．これより $m = -\dfrac{1}{b},\ c$ が得られるので，求める直線は $y = -\dfrac{x}{b},\ y = cx$.

(ii) 原点を通る A 不変な直線 l が $x = 0$ とおける場合．

(1) (ii) の議論を $n = 0$ で行うと，解のないことが分かる．

以上 (i), (ii) より答は $y = -\dfrac{x}{b},\ y = cx$.

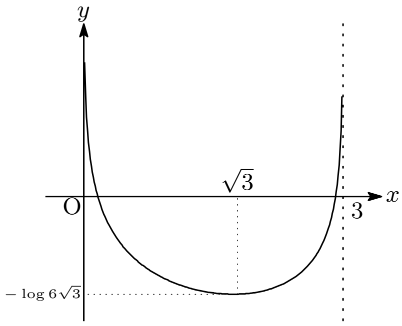
[4]

$C:\ y=f(x)=\log\dfrac{1}{x+3}+\log\dfrac{1}{x}+\log\dfrac{1}{3-x}\quad (0<x<3)$

(1)　$f'(x)=\dfrac{3(x^2-3)}{x(3+x)(3-x)}$ より極値は $x=\sqrt{3}$ でとる．

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\log\frac{1}{x(3+x)(3-x)}=+\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to3-0}f(x)=\lim_{x\to3-0}\log\frac{1}{x(3+x)(3-x)}=+\infty$ より，増減表およびグラフは次のようになる．

x	0		$\sqrt{3}$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\log 6\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$



(2)　$f(a)=f(b)\iff\log\dfrac{1}{a(3+a)(3-a)}=\log\dfrac{1}{b(3+b)(3-b)}\iff a(3+a)(3-a)=b(3+b)(3-b)$

$\iff a^3-b^3-9(a-b)=0\iff a^2+ab+b^2=9\quad(\because\ a\fallingdotseq b)$ (これを ① 式とする．)

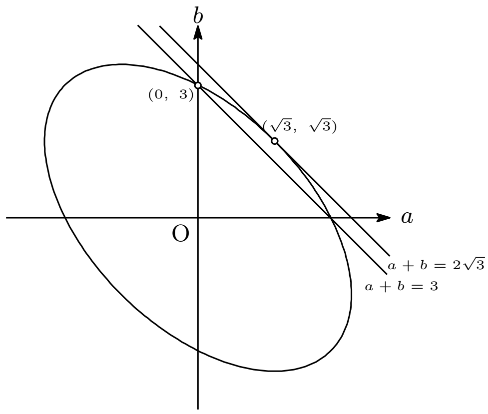
(3)　2 接線 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ と $y=f'(b)(x-b)+f(b)$ を連立して，交点の x 座標 c を求めると，$c=\dfrac{af'(a)-bf'(b)}{f'(a)-f'(b)}$

これを計算し $a(3+a)(3-a)=b(3+b)(3-b)$ および ① 式 を利用すると，$c=\dfrac{6}{a+b}$ が得られる．

① 式は，図のような楕円 $(0<a<\sqrt{3})$ を表すので，$a+b=k$ とおき，直線 $b=-a+k$ と，楕円 $(0<a<\sqrt{3})$ が共有点を持つ条件を求めると，$3<k<2\sqrt{3}$.

（ $a+b=2\sqrt{3}$ は $(\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ における楕円の接線になっていることを注意しておく.）

よって，$c=\dfrac{6}{k}$ の取り得る範囲は $\sqrt{3}<c<2$.



[5]

(1)　求める確率を p_n とおくと，$X_n = n+1$ となるのは，1 回目で (表，表)，残り $(n-1)$ 回は全て (表) となる場合しかないので，$p_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$

(2)　求める確率を q_n とおく．$n \geqq 3$ の場合，$X_n = n$ となるのは，$X_{n-1} = n-1$ かつ n 回目に (表) が出る場合しかないので，

$$q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} \cdots ①$$

が成り立つ．$X_2 = 2$ となるのは，1 回目 (表，裏) 2 回目 (表，表) の場合しかないので，

$q_2 = \dfrac{1}{8} \cdots ②$　　①，② より，$q_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$

(3)　求める確率を r_n とおく．$n \geqq 4$ の場合，$X_n = n-1$ となるのは，$X_{n-1} = n$ かつ n 回目に (裏) が出る場合と，$X_{n-1} = n-2$ かつ n 回目に (表) が出る場合があるので，$r_n = \dfrac{1}{2}p_{n-1} + \dfrac{1}{2}r_{n-1}$

よって，$2^n r_n = 2^{n-1}r_{n-1} + \dfrac{1}{2} \cdots ③$　となり，$\{2^n r_n\}$ $(n \geqq 3)$ が公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であることがわかる．

$X_3 = 2$ となるのは，$(X_1,\ X_2,\ X_3) = (0,\ 0,\ 2),\ (2,\ 3,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2)$ の 3 つの場合があるので，$r_3 = \dfrac{3}{16} \cdots ④$ となる．③，④ より，$2^n r_n = 2^3 r_3 + \dfrac{1}{2}(n-3)$　　ゆえに，$r_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$

[講評]

大問 1　軌跡（標準）

よくある設定の問題．(2) の誘導がやや有難迷惑だが，(2) から直接 t 消去でもできる．

大問 2　正四面体，展開図（易）

(3) できちんと場合分けできるかだけがポイント．この問題は完答したい．

大問 3　一次変換，不動直線（標準）

典型的な不動直線の問題．y 軸に平行な直線のことも忘れずに丁寧に場合分けしていけばよい．

大問 4　数Ⅲ微分（難）

(1) はグラフを描くだけ．(2) は交点を求めるだけ．(3) は $a^2 + ab + b^2 = 9$ のときの $a+b$ の範囲を求めるだけ．と，どの問題もよくある話題ではあるが，計算はかなりしんどい．文字の処理もうまくやらないと大変．

大問 5　確率（やや難）

(1),(2) はそう難しくはないが (3) を見抜けるかの勝負．

難易度は 2012 後期，2013 前期と同じくらい．全体的に正確な論述力，計算力が必要．大問 4 を完答するのはそうとう腕力が要る．残りの 4 題でどれだけ得点できるかの勝負になりそう．２問完答残りを半答以上で仕上げて，７割がボーダーであろう．