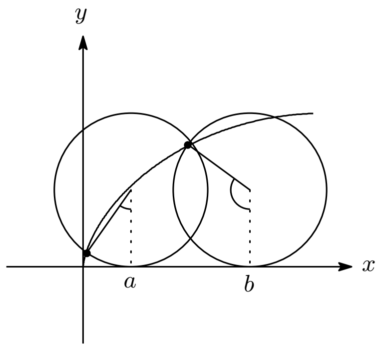
大阪医科大学2014年度後期入学試験　解答速報　数学

平成２６年　３月１０日　実施

[1]



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}=(\theta,\ 1)+(-\sin\theta,\ -\cos\theta)=(\theta-\sin\theta,\ 1-\cos\theta)$

となるので，$(x(\theta),\ y(\theta))=(\theta-\sin\theta,\ 1-\cos\theta)$ である．

(2)　$x(b)-x(a)=(b-\sin b)-(a-\sin a)$

$=(b-a)-2\cos\dfrac{b+a}{2}\sin\dfrac{b-a}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{5}$.

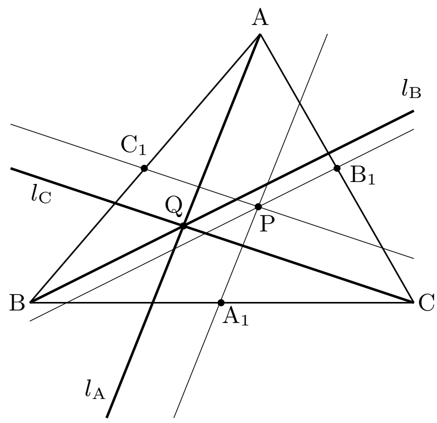
これと $b-a=\dfrac{\pi}{2}$, $\sin\dfrac{b-a}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から $\cos\dfrac{b+a}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ がわかる．

ここで，$y(b)-y(a)=(1-\cos b)-(1-\cos a)=-\cos b+\cos a=2\sin\dfrac{b+a}{2}\sin\dfrac{b-a}{2}=\sqrt{2}\sin\dfrac{b+a}{2}$

と変形でき，$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{b+a}{2}<\dfrac{3\pi}{4}$ から $\sin\dfrac{b+a}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ (>0) となる．

すなわち，$y(b)-y(a)=\sqrt{2}\times\dfrac{7\sqrt{2}}{10}=\dfrac{7}{5}$.

[2]



(1)　平面上の点 O を始点として点 A, B, C の位置ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ とする．l_{A}, l_{B}, l_{C} 上の点をそれぞれ $\mathrm{Q_A}$，$\mathrm{Q_B}$，$\mathrm{Q_C}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ_A}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q_a\overrightarrow{\mathrm{PA_1}}=\overrightarrow{a}+q_a\left(\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{2}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ_B}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+q_b\overrightarrow{\mathrm{PB_1}}=\overrightarrow{b}+q_b\left(\frac{\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}}{2}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ_C}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+q_c\overrightarrow{\mathrm{PC_1}}=\overrightarrow{c}+q_c\left(\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)$$

とおける．$q_a=q_b=q_c=2$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{OQ_A}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ_B}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ_C}}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となるので 3 直線

l_{A}，l_{B}，l_{C} はこれを位置ベクトルとする 1 点で交わる．(証明終)

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ である．直線 PQ 上の点を R とするとその位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=(1-3t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$$

と表される．$t=\dfrac{1}{3}$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$ となりこの点は P の位置によらないので題意の定点となる (三角形 ABC の重心である)．また $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ なので点 R は線分 PQ を 1 : 2 に内分する点である．

[3]

(1)　接線の方程式はそれぞれ，$l_a : y = \dfrac{a}{4}x - \dfrac{a^2}{8}$，$l_b : y = \dfrac{b}{4}x - \dfrac{b^2}{8}$，$l_c : y = \dfrac{c}{4}x - \dfrac{c^2}{8}$ である．

これらを用いて，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{ab}{8}\right)$，$\mathrm{R}\left(\dfrac{b+c}{2},\ \dfrac{bc}{8}\right)$，$\overline{\mathrm{QR}} = \dfrac{1}{8}(c-a)\sqrt{b^2+16}$

(2)　l_a が点 P を通ることから $1 = -\dfrac{3}{4}a - \dfrac{a^2}{8} \iff (a+2)(a+4) = 0$．$a > -3$ より，$a = -2$

l_c が点 S を通ることから $10 = \dfrac{9}{4}c - \dfrac{c^2}{8} \iff (c-8)(c-10) = 0$．$c < 9$ より，$c = 8$

(3)　$a = -2,\ c = 8$ のとき (1) の結果から，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{b}{2}-1,\ -\dfrac{b}{4}\right)$，$\mathrm{R}\left(\dfrac{b}{2}+4,\ b\right)$，$\overline{\mathrm{QR}} = \dfrac{5}{4}\sqrt{b^2+16}$ が得られ，また，

$\overline{\mathrm{PQ}} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}(b+4)$，$\overline{\mathrm{RS}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}(10-b)$ がわかるので，$\mathrm{PQ}+\mathrm{QR}+\mathrm{RS}$ を b の関数とみて，$f(b)$ $(-2 < b < 8)$ とおくことにする．

$f(b) = \dfrac{\sqrt{5}}{4}(b+4) + \dfrac{5}{4}\sqrt{b^2+16} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}(10-b) = \dfrac{5}{4}\sqrt{b^2+16} - \dfrac{\sqrt{5}}{4}b + 6\sqrt{5}$

$f'(b) = \dfrac{5b}{4\sqrt{b^2+16}} - \dfrac{\sqrt{5}}{4}$ より，$f'(b) = 0 \iff b = 2$．増減は右図のようになるので，最小値は $f(2) = 8\sqrt{5}$

b	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	8
$f'(b)$		$-$	0	$+$	
$f(b)$		↘	最小	↗	

[4]

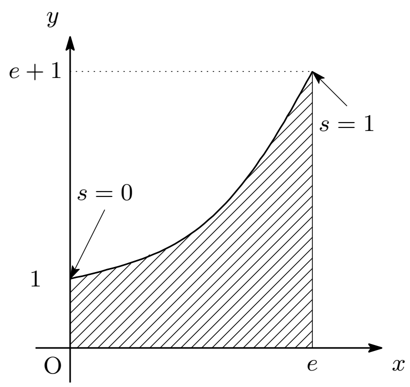
(1)　部分積分により，$\displaystyle\int x^2e^x\,dx = (x^2-2x+2)e^x + C_1$，$\displaystyle\int xe^x\,dx = (x-1)e^x + C_2$（$C_1$，$C_2$ は積分定数）であるから，

$$\int(px^2+qx+r)e^x\,dx = \{px^2+(-2p+q)x+2p-q+r\}e^x + C \text{（C は積分定数）}$$

となるので，題意は示された．また，これにより $k = p,\ l = -2p+q,\ m = 2p-q+r$ である．

(2)

$0 \leqq s \leqq 1$ より $\dfrac{dx}{ds} = e^s + 1 > 0$，$\dfrac{dy}{ds} = e^s + 2s > 0$ なので，曲線 K は右図のように単調なグラフであることがわかる．したがって，求める面積は



$$\begin{aligned}
\int_0^e y\,dx &= \int_0^1 y\frac{dx}{ds}\,ds \\
&= \int_0^1 (e^s+s^2)(e^s+1)\,ds \\
&= \int_0^1 \{e^{2s}+(s^2+1)e^s+s^2\}\,ds \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{2s}+(s^2-2s+3)e^s+\frac{1}{3}s^3\right]_0^1 \text{（ここで (1) の結果を利用した）} \\
&= \frac{1}{2}e^2+2e-\frac{19}{6}
\end{aligned}$$

[5] 具体例がないと考えづらいので，$n=5$ の場合の $P(X=i, Y_5=k)$ の表を載せておこう．

$X \diagdown Y_5$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$
$\cdots$										
5	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$
6	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	0	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$
$\cdots$										
10	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	0

(1) (i) $1 \leqq i \leqq n$ のとき，球 i を取り出す確率は $\dfrac{1}{10}$．この球は戻すので，次に k の球をとる確率は $\dfrac{1}{10}$．従って $P(X=i,\ Y_n=k)=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{100}$.

(ii) $i>n$ かつ $k \fallingdotseq i$ のとき，球 i を取り出す確率は $\dfrac{1}{10}$．この球は取り除くので，次に k の球をとる確率は $\dfrac{1}{9}$．従って $P(X=i,\ Y_n=k)=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{90}$.

(iii) $i>n$ かつ $k=i$ のとき，球 i を取り出す確率は $\dfrac{1}{10}$．この球は取り除くので，次に $k(=i)$ の球をとりだすことはできない．従って $P(X=i,\ Y_n=k)=0$.

(2) (i) $k \leqq n$ の場合，$P(Y_n=k)=\displaystyle\sum_{i=1}^{10}P(X=i,\ Y_n=k)=\frac{1}{100}\times n+\frac{1}{90}\times(10-n)=\frac{100-n}{900}$.

(ii) $k>n$ の場合，$P(Y_n=k)=\displaystyle\sum_{i=1}^{10}P(X=i,\ Y_n=k)=\frac{1}{100}\times n+\frac{1}{90}\times(9-n)=\frac{90-n}{900}$.

(3) $E(Y_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}kP(Y_n=k)=(1+2+\cdots+n)\times\frac{100-n}{900}+\{(n+1)+\cdots+10\}\times\frac{90-n}{900}$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{100-n}{900}+\left\{55-\frac{n(n+1)}{2}\right\}\frac{90-n}{900}=\frac{n^2-10n+990}{180}$$

(4) (3) より $E(Y_n)=\dfrac{(n-5)^2+965}{180}$ なので，最小であるものは $E(Y_5)$, その値は $\dfrac{965}{180}=\dfrac{193}{36}$.

[講評]

大問１　パラメータ（標準）　サイクロイドの問題だが，三角関数の基本的な計算問題.

大問２　平面図形（やや難）　点の置き方によって労力が大分変わってしまう．解答では始点を一般の点にとったが，P を始点にするのもよい.

大問３　数 iii 微分（標準）　あまり方針で困ることはないだろう．あまり深読みせず，正確に計算して増減を調べてやればよい.

大問４　数 iii 積分（標準）　見た目は少々厳ついが，単純な計算問題.

大問５　確率（標準）　本質的に難しい問題ではないが，設定が抽象的なので題意を読み取るのに苦労した人もいただろう.

全体として難易度は 2013 後期，2014 前期に比べて易しい．大問１，３，４は完答したい．大問２，５を半答以上で仕上げて，ボーダーは８割強.

医歯学部進学予備校　メビオ

〒 540–0033　大阪市中央区石町　2–3–12　ベルヴォア天満橋

TEL 06–6946–0109　FAX 06–6941–9416　URL http://www.mebio.co.jp/

MeBio Scholastics