# 愛知医科大学2012年度入学試験　解答速報　数学

平成２４年　1月２４日　実施

## I

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=15$ において $x\to-1$ のとき 分母 $\to 0$ であるから 分子 $\to 0$ が必要である．従って $f(-1)=0$ であり，$f(x)$ は $x+1$ で割り切れる．同様に考えて $f(x)$ は $x-2$ で割り切れる．

そこで $f(x)=(x+1)(x-2)g(x)$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)g(x)}{x+1}=-3g(-1)=15,$
$\therefore\ g(-1)=-5,\ \displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(x-2)g(x)}{x-2}=3g(2)=3,\ \therefore\ g(2)=1.$
これを満たす最小次数の多項式は $g(x)=2x-3$ であり，$f(x)=(x+1)(x-2)(2x-3)$ である．

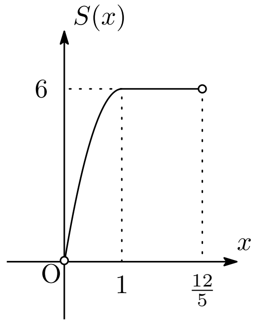
## II

(1)　$t=2^{\log_5 x}$ より $t^2=4^{\log_5 x}$ となる．したがって $x^{\log_5 4}=t^2$

(2)　$f(x)=2t\cdot t^2+5\cdot t^2-8t-3\cdot t+4=2t^3+5t^2-11t+4=(t-1)(2t-1)(t+4)$ と変形できるので
$f(x)=0\iff t=1,\ \dfrac{1}{2}\ (\because t>0)$．従って，$x=1,\ \dfrac{1}{5}$

## III

各頂点と対辺との距離の最小値は $\dfrac{12}{5}$ なので与条件から $0<x<\dfrac{12}{5}$ である．
$0<x<1$ のときは $\overline{\mathrm{P}}\cap\overline{\mathrm{Q}}\cap\overline{\mathrm{R}}$ である部分が $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部に存在し $\triangle\mathrm{ABC}$ と相似な三角形となる．図形的な考察によりこの三角形の面積は $\dfrac{1}{2}(4-4x)(3-3x)=6(1-x)^2$，
また $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4=6$ なので $S(x)=6-6(1-x)^2=-6x^2+12x$．また
$1\leqq x<\dfrac{12}{5}$ のときは $\overline{\mathrm{P}}\cap\overline{\mathrm{Q}}\cap\overline{\mathrm{R}}$ である部分は存在せず $S(x)=\triangle\mathrm{ABC}=6$ となる．以上から $S(x)=\begin{cases}-6x^2+12x & (0<x<1)\\ 6 & \left(1\leqq x<\dfrac{12}{5}\right)\end{cases}$ でありグラフは右図.




## IV

i)　$n=2m+1\ (m=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき，2 つの異なる自然数のうち小さいを $k$，大きい方を $\ell$ とすると，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ で，このとき，$\ell=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ 2m+1-k$ とわかる．よって，
$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(2m+1-k-k)=(2m+1)m-m(m+1)=m^2=\frac{(n-1)^2}{4}$

ii)　$n=2m\ (m=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき，i) と同様に考えて，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ で，このとき，$\ell=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ 2m-k$ とわかる，よって，
$\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}(2m-k-k)=2m(m-1)-(m-1)m=m(m-1)=\frac{n(n-2)}{4}$

**V** $\triangle$ABC を $z=k$ $(0 \leqq k \leqq 3)$ で切った図形（線分）を考える．
線分 AB , BC , AC と $z=k$ の交点を P, Q, R とする．また，$(0,\ 0,\ k)$ を $\mathrm{Z}_k$ とおくことにする．

**(I)** $0 \leqq k \leqq 2$ のとき

図形は $\mathrm{P}\left(1+\dfrac{k}{2},\ 1-\dfrac{k}{2},\ k\right)$，$\mathrm{Q}\left(1-\dfrac{k}{3},\ 1-\dfrac{k}{3},\ k\right)$ を結ぶ線分となる．したがってこの線分を $z$ 軸を中心に回転させると，半径 $\mathrm{Z}_k\mathrm{P}$ の円盤から半径 $\mathrm{Z}_k\mathrm{Q}$ の円盤をくりぬいた形となる．

**(II)** $2 \leqq k \leqq 3$ のとき

図形は $\mathrm{R}\,(6-2k,\ 0,\ k)$，$\mathrm{Q}\left(1-\dfrac{k}{3},\ 1-\dfrac{k}{3},\ k\right)$ を結ぶ線分となる．したがってこの線分を $z$ 軸を中心に回転させると，半径 $\mathrm{Z}_k\mathrm{R}$ の円盤から半径 $\mathrm{Z}_k\mathrm{Q}$ の円盤をくりぬいた形となる．

以上により求める体積 $V$ は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi\overline{\mathrm{Z}_k\mathrm{P}}^2 dk + \int_2^3 \pi\overline{\mathrm{Z}_k\mathrm{R}}^2 dk - \int_0^3 \pi\overline{\mathrm{Z}_k\mathrm{Q}}^2 dk \\ &= \pi\int_0^2 \left(2+\frac{k^2}{2}\right) dk + \pi\int_2^3 (6-2k)^2 dk - \pi\int_0^3 2\left(1-\frac{k}{3}\right)^2 dk \\ &= \frac{14}{3}\pi \end{aligned}$$

医歯学部進学予備校　メビオ

〒 540–0033　大阪市中央区石町　2–3–12　ベルヴォア天満橋

TEL 06–6946–0109　FAX 06–6941–9416　URL http://www.mebio.co.jp/