久留米大学医学部 2018年度入学試験 解答速報 数学

2018年2月1日 実施

次の $\boxed{}$ に適切な解を入れよ。複数の解がある場合は，コンマで区切ってすべての解を記入すること。

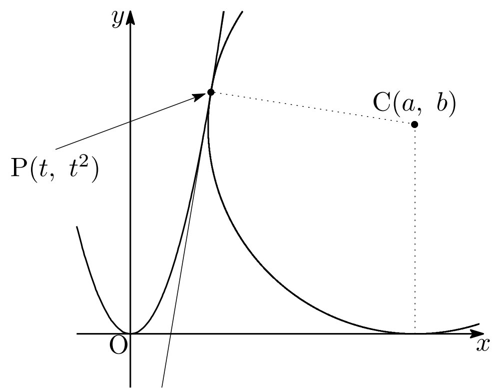
1. 2 次曲線 $y=x^2$ と円 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ がただ 1 つの共有点 P をもち（ $a,\ b$ は実数で $a>0,\ b>0$ とする），点 P と円の中心を通る直線の傾きが $-\dfrac{1}{6}$ であるとき，点 P の座標の数値は $(x,\ y)=$ $\boxed{①}$ で， b の値は $\boxed{②}$ である。

解答

① $(3,\ 9)$ ② $\dfrac{37-\sqrt{37}}{4}$

解説

題意をみたすのは，図のように放物線と円が第 1 象限で接するときである．このときの共有点（接点）P の座標を $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，円の中心を $\mathrm{C}(a,\ b)$ とおくと，



- 直線 CP の傾きが $-\dfrac{1}{6}$ であるから，
  $\dfrac{t^2-b}{t-a}=-\dfrac{1}{6}\cdots$ ㋐
- P は円上の点であるから，
  $(t-a)^2+(t^2-b)^2=b^2\cdots$ ㋑
- 点 P における接線は直線 CP と垂直であるからその傾きについて
  $2t=6\cdots$ ㋒

が成り立つ． ㋒ より $t=3$ となるので，点 P の座標は $\mathbf{(3,\ 9)}$ である．
また，このとき

$$㋐ \iff (3-a)=-6(9-b)\cdots ㋓,$$
$$㋑ \iff (3-a)^2+(9-b)^2=b^2\cdots ㋔$$

であるから，㋓を㋔に代入すると，

$$\{-6(9-b)\}^2+(9-b)^2=b^2 \iff 37(9-b)^2=b^2 \iff \sqrt{37}(9-b)=b$$
$$(\because 9-b>0,\ b>0)$$

これを解いて $b=\dfrac{\mathbf{37-\sqrt{37}}}{\mathbf{4}}$ を得る．

2. 関数 $f(n)$ は，$f(n)=\lim_{c\to\infty}\left\{\int_0^c x^{n-1}e^{-x}\,dx\right\}$ と定義されている。このとき，$f(1)=$ $\boxed{③}$，$\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=$ $\boxed{④}$，$f(n)=$ $\boxed{⑤}$ である。ただし，c は実数，n は自然数であり，$\lim_{t\to\infty}t^k e^{-t}=0$（$k$ は自然数）とする。

解答

③ 1　④ n　⑤ $(n-1)!$

解説

$\int_0^c e^{-x}\,dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^c=-e^{-c}+1$ より，$f(1)=\lim_{c\to\infty}(-e^{-c}+1)=\mathbf{1}$.

また，

$$
\begin{aligned}
\int_0^c x^n e^{-x}\,dx &= \Big[-x^n e^{-x}\Big]_0^c-\int_0^c nx^{n-1}\cdot(-e^{-x})\,dx \\
&= -c^n e^{-c}+n\int_0^c x^{n-1}e^{-x}\,dx
\end{aligned}
$$

より，$f(n)$ が収束すると仮定すると $f(n+1)=nf(n)$ となって $f(n+1)$ も収束するので，数学的帰納法により任意の自然数 n で $f(n+1)$ は収束し，$\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=\boldsymbol{n}$ である．したがって，

$$
\begin{aligned}
f(n) &= (n-1)f(n-1) \\
&= (n-1)(n-2)f(n-2) \\
&= \cdots\cdots \\
&= (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 f(1) \\
&= \boldsymbol{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

である．

注釈

$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ をガンマ関数と呼ぶ．0 と負の整数を除く任意の実数 x に対して，$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ が成り立つ．とくに自然数 n に対して，$\Gamma(n)=(n-1)!$ である．

3. 関数 $f(x)$ は，$f(x) = ax^2 + 2(a-2)x + 3a - 2$ と定義されている。ただし，a は実数で $a \leqq 0$ とする。

(1) $f(x)$ が 2 次関数である時，頂点の x の座標を a を用いて表すと $\boxed{\text{⑥}}$ である。

(2) $-2 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{⑦}}$ である。

(3) 方程式 $f(x) = 0$ が実数解を持つとき，$-2 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $a = \boxed{\text{⑧}}$ のとき $\boxed{\text{⑨}}$ である。

解答

⑥ $-1 + \dfrac{2}{a}$　⑦ $a \leqq -2$ のとき $\dfrac{2(a+2)(a-1)}{a}$，$-2 < a \leqq 0$ のとき $3a + 6$　⑧ -2　⑨ -32

もし $x = \boxed{\text{⑧}}$ という問題文なら，⑧ 2　⑨ $11a - 10$

解説

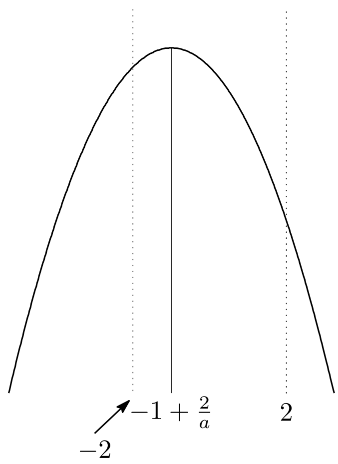
(1) $f(x)$ が 2 次関数のとき，$a \fallingdotseq 0$ であり，このとき $f(x) = a\left(x + \dfrac{a-2}{a}\right)^2 + \dfrac{2(a+2)(a-1)}{a}$

となるので，頂点の x 座標は $x = -\dfrac{a-2}{a} = \boldsymbol{-1 + \dfrac{2}{a}}$ である.

(2) (i) $a \fallingdotseq 0$ のとき，グラフは上に凸の放物線となり，かつ軸について $-1 + \dfrac{2}{a} < -1$ であることに注意すると，

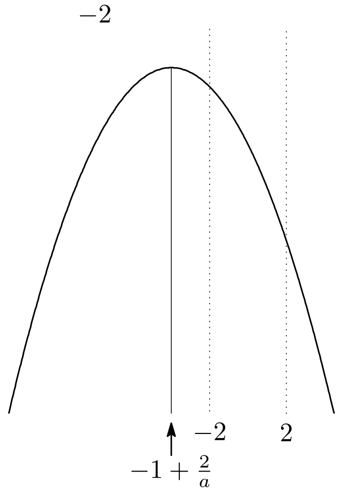
㋐ $-2 \leqq -1 + \dfrac{2}{a} < -1$ すなわち $a \leqq -2$ のとき，

最大値は $f\left(-1 + \dfrac{2}{a}\right) = \dfrac{2(a+2)(a-1)}{a}$



㋑ $-1 + \dfrac{2}{a} < -2$ すなわち $-2 < a < 0$ のとき，

最大値は $f(-2) = 3a + 6$



(ⅱ) $a=0$ のとき，$f(x)=-4x-2$ となるので，最大値は $f(-2)=6$ であるがこれは (ⅱ) ㋑ において，$a=0$ とした場合と一致する．

以上により，$\boldsymbol{a \leqq -2}$ **のとき** $\boldsymbol{\dfrac{2(a+2)(a-1)}{a}}$**，**$\boldsymbol{-2<a\leqq 0}$ **のとき** $\boldsymbol{3a+6}$

(3) (ⅰ) $a \fallingdotseq 0$ のとき，方程式 $f(x)=0$ が実数解をもつのは $f(x)$ の判別式を D として $D \geqq 0$ となるときである．このとき，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (a-2)^2 - a(3a-2)\\ &= -2a^2-2a+4 \geqq 0\end{aligned}$$

より $-2 \leqq a \leqq 1$ となる．よって，今は $-2 \leqq a < 0$ の場合を考えていることになるが，この場合，(2) の議論より軸は $x=-2$ より小さいところにあることを考慮すると，最小値は $x=2$ のとき $11a-10$ となる．

(ⅱ) $a=0$ のとき，$f(x)=0 \iff -4x-2=0$ は解をもつ．このとき $f(x)$ の最小値は $f(2)=-10$ であるが，これは (ⅰ) において $a=0$ とした場合と一致する．

以上により最小値は $11a-10$ である．$-2 \leqq a \leqq 0$ を考慮するとこれは $a=\boldsymbol{-2}$ のとき最小値 $\boldsymbol{-32}$ をとる．

$\boxed{\text{注釈}}$

- この問題では，(2) は「最小値」，(3) は「最大値」を問う方が空所補充形式の問題としては自然であろう．
- 「$f(x)$ の最小値」と訊かれれば普通は「$x=*$」のとき $f(*)=\cdots$ という答になるはずであるが，問題が「$a=*$ のとき $\cdots$」となっているのであえて「$f(x)$ の最小値の最小値」を求めた．しかし，出題ミスの可能性が高い問題であろう．

4.　ガラス板 8 枚を光が透過すると，光の強さはガラスがないときの 80% になった。各ガラス板の形状や特性は同じとする。

(1)　光が 1 枚のガラス板を透過すると，光の強さはガラスがないときの $\boxed{\quad ⑩ \quad}$ % になる。

(2)　透過した光の強さをガラスがないときの 10% 以下にするには，ガラス板は $\boxed{\quad ⑪ \quad}$ 枚以上必要である。$\log_{10} 2 = 0.301$ として計算すること。

解答

⑩ $100 \times \sqrt[8]{\dfrac{4}{5}}$　⑪ 83

解説

(1)　1 枚のガラス板を透過すると，光の強さが a 倍になるとすると，$a^8 = 0.8 \Longleftrightarrow a = \sqrt[8]{\dfrac{4}{5}}$.

よって答は $\mathbf{100 \times \sqrt[8]{\dfrac{4}{5}}}$ %.

注釈

$\boxed{\quad ⑩ \quad}$ % と百分率で問われたら，普通は数値で答えねばと思ってしまう．受験生を惑わせる問題である．

(2)　$a^n \leqq 0.1 \Longleftrightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{n}{8}} \leqq 0.1 \Longleftrightarrow \dfrac{n}{8}\log_{10}\dfrac{4}{5} \leqq -1 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{8}(3\log_{10} 2 - 1)n \leqq -1$

$\Longleftrightarrow -\dfrac{0.097}{8}n \leqq -1 \Longleftrightarrow n \geqq \dfrac{8}{0.097} = 82.4\cdots$

よって **83** 枚以上必要である．

5. 複素数平面上に3点 $\mathrm{A}(-1+5i)$, $\mathrm{B}(2+3i)$, $\mathrm{C}(3-2i)$ がある.

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を複素数で表すと $\boxed{⑫}$ である。

(2) $\angle\mathrm{ABC}$ の大きさは $\boxed{⑬}$ である。

解答

⑫ $\dfrac{4}{3}+2i$　⑬ $\dfrac{3}{4}\pi$

解説

$\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ とする.

(1) $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\dfrac{4+6i}{3}=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}+2i}$

(2) $\arg\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=\arg\dfrac{1-5i}{-3+2i}=\arg(-1+i)=\dfrac{3}{4}\pi+2n\pi$ (n は整数)

よって答は $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}\pi}$

6.　3つの状態 A，B，C があり，その状態は下記の条件で確率的に変化する。

- 状態 A にあるとき，翌日には確率 $\dfrac{1}{6}$ で状態 B に移り，確率 $\dfrac{5}{6}$ で状態 A に留まる。
- 状態 B にあるとき，翌日には確率 $\dfrac{1}{3}$ で状態 A に移り，確率 $\dfrac{1}{3}$ で状態 B に留まり，確率 $\dfrac{1}{3}$ で状態 C に移る。
- 状態 C にあるとき，翌日には確率 $\dfrac{1}{6}$ で状態 B に移り，確率 $\dfrac{5}{6}$ で状態 C に留まる。

第 n 日目に状態 A，B，C である確率をそれぞれ A_n，B_n，C_n で表すとする。

(1)　漸化式が $a_{n+1} = pa_n + qr^n$，$a_1 = a$ と定義されているとき，両辺を r^{n+1} で割ることにより一般項を求めると $a_n = \boxed{⑭}$ となる。ただし，a，p，q，r は実数で $p \fallingdotseq r$, $p \fallingdotseq 0$, $q \fallingdotseq 0$, $r \fallingdotseq 0$ であり，n は自然数とする。

(2)　B_{n+1} を $B_{n+1} = \alpha A_n + \beta B_n + \gamma C_n$ と表すと α，β，γ の値は $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = \boxed{⑮}$ である。

(3)　はじめ（第1日目）は確率1で状態 A にあるとする。このとき，$A_n = \boxed{⑯}$，$B_n = \boxed{⑰}$ である。また，十分に日数が経過したとき，状態 C である確率は $\boxed{⑱}$ である。

解答

⑭ $r\left(\dfrac{a}{r} - \dfrac{q}{r-p}\right)p^{n-1} + \dfrac{q}{r-p}r^n$　⑮ $\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{6}\right)$

⑯ $\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n + \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$　⑰ $\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$　⑱ $\dfrac{2}{5}$

解説

(1)　$a_{n+1} = pa_n + qr^n$ の両辺を r^{n+1} $(\fallingdotseq 0)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{p}{r}\cdot\frac{a_n}{r^n} + \frac{q}{r}$$

となる．方程式 $x = \dfrac{p}{r}x + \dfrac{q}{r}$ の解が $x = \dfrac{q}{r-p}$ $(\because\ p \fallingdotseq r)$ であることを用いると，

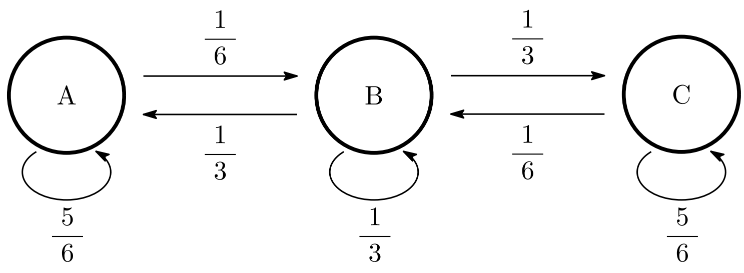
$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} - \frac{q}{r-p} = \frac{p}{r}\left(\frac{a_n}{r^n} - \frac{q}{r-p}\right)$$

となり，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{r^n} - \dfrac{q}{r-p}\right\}$ は初項が $\dfrac{a}{r} - \dfrac{q}{r-p}$ で公比が $\dfrac{p}{r}$ の等比数列である．よって，

$$\frac{a_n}{r^n} - \frac{q}{r-p} = \left(\frac{a}{r} - \frac{q}{r-p}\right)\left(\frac{p}{r}\right)^{n-1}$$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{a_n = r\left(\frac{a}{r} - \frac{q}{r-p}\right)p^{n-1} + \frac{qr^n}{r-p}}$$

(2)　状態の遷移と確率は下図のようになる．



これより，$B_{n+1} = \dfrac{1}{6}A_n + \dfrac{1}{3}B_n + \dfrac{1}{6}C_n \cdots$ ㋐ と分かるので，

$$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = \left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right)}$$

(3) $A_n + B_n + C_n = 1$ に注意すると，㋐から

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \frac{1}{3}B_n + \frac{1}{6}(A_n + C_n) \\ &= \frac{1}{3}B_n + \frac{1}{6}(1 - B_n) \\ &= \frac{1}{6}B_n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる．方程式 $x = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{6}$ の解が $x = \dfrac{1}{5}$ であることを用いると，

$$B_{n+1} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6}\left(B_n - \frac{1}{5}\right)$$

となるので，数列 $\left\{B_n - \dfrac{1}{5}\right\}$ は初項が $B_1 - \dfrac{1}{5} = -\dfrac{1}{5}$ で公比が $\dfrac{1}{6}$ の等比数列である．よって，

$$\begin{aligned} & B_n - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\ \iff & \boldsymbol{B_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

となる．また，状態遷移図から

$$A_{n+1} = \frac{5}{6}A_n + \frac{1}{3}B_n$$

と分かるので，これに先の B_n を代入すると

$$A_{n+1} = \frac{5}{6}A_n + \frac{1}{15} - \frac{1}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

となる．方程式 $x = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{1}{15}$ の解が $x = \dfrac{2}{5}$ であることを用いると，

$$\begin{aligned} A_{n+1} - \frac{2}{5} &= \frac{5}{6}\left(A_n - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\ &= \frac{5}{6}\left(A_n - \frac{2}{5}\right) - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} \end{aligned}$$

となるので，(1) の漸化式において $a_n = A_n - \dfrac{2}{5}$ と見て，$a = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$, $p = \dfrac{5}{6}$, $q = -\dfrac{2}{5}$, $r = \dfrac{1}{6}$ を代入して整理することにより，

$$\boldsymbol{A_n = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{3}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

となる．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2}{5}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} B_n = \frac{1}{5}$ に注意すると，十分に日数が経過したとき状態 C である確率は，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} C_n &= \lim_{n\to\infty}(1 - A_n - B_n)\\ &= 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{5}}\end{aligned}$$

講評

1. ［図形と式］（標準）放物線と円が接する条件．内容は平易だが計算がやや重い．
2. ［数Ⅲ積分］（やや難）定積分と極限の融合問題（Γ 関数）．
3. ［2 次関数］（標準）(2), (3) は上に凸，下に凸を勘違いした出題ミスである可能性が高い．
   また ⑧ も本来なら x の値を問うべき．
4. ［指数対数］（標準）単純な対数計算の問題．ただ答として求められているものが，「近似値」なのか「指数表記のもの」なのか戸惑う．
5. ［複素数］（易）偏角の基本がわかっていれば問題なく解ける．ベクトルとして解釈しても良い．
6. ［確率］（やや難）確率と漸化式の融合問題．漸化式はすぐに立つがその後の計算が大変．

問題による難易の差が激しい．また，出題ミスと思われる問題もあり，受験生にとって非常に取り組みにくい．数学ではあまり差がつかないと思われる．目標は 60% .

医歯学部進学予備校 メビオ
〒540-0033 大阪市中央区石町2-3-12 ベルヴォア天満橋
フリーダイヤル 0120-146-156
http://www.mebio.co.jp/
MeBio Scholastics