久留米大学医学部 2017年度入学試験 解答速報 数学

2017年2月1日 実施

次の $\boxed{}$ に適切な解を入れよ。複数の解がある場合は，コンマで区切ってすべての解を記入すること。

1. $x,\ y$ を 1 以上の整数とする。

(1) $xy = 12$ を満たす $x,\ y$ の組み合わせをすべて求めると $(x,\ y) = \boxed{①}$ となる。

(2) $xy + 2x - y - 14 = 0$ を満たす $x,\ y$ の組み合わせをすべて求めると $(x,\ y) = \boxed{②}$ となる。

(3) $\dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{y} + 1 = 0$ を満たす $x,\ y$ の組み合わせをすべて求めると $(x,\ y) = \boxed{③}$ となる。

解答

① (1, 12), (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2), (12, 1)　② (5, 1), (4, 2), (3, 4), (2, 10)　③ (1, 1), (6, 3), (16, 4)

解説

(1) 12 の正の約数を考えればよい.

(2) $(x-1)(y+2) = 12$ と変形できる．$y + 2 \geqq 3$ に注意して $y + 2 = 3,\ 4,\ 6,\ 12$ が得られるので，$(x-1,\ y+2) = (4,\ 3),\ (3,\ 4),\ (2,\ 6),\ (1,\ 12)$.
よって $\boldsymbol{(x,\ y) = (5,\ 1),\ (4,\ 2),\ (3,\ 4),\ (2,\ 10)}$.

(3) 分母を払うと $(x+4)(y-5) = -20$ と変形できる．$x + 4 \geqq 5$ に注意して $x + 4 = 5,\ 10,\ 20$ が得られるので，$(x+4,\ y-5) = (5,\ -4),\ (10,\ -2),\ (20,\ -1)$.
よって $\boldsymbol{(x,\ y) = (1,\ 1),\ (6,\ 3),\ (16,\ 4)}$.

2. $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$f(x)=\displaystyle\int_x^{2x} \sin 2t\,dt$ は $x=$ $\boxed{\quad ④ \quad}$ で最小値 $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ をとる。また，最大値は $\boxed{\quad ⑥ \quad}$ である。

解答

④ $\dfrac{\pi}{2}$　⑤ -1　⑥ $\dfrac{9}{16}$

解説

$$f(x)=\int_x^{2x} \sin 2t\,dt=-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x=-\cos^2 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$$

平方完成すると

$$f(x)=-\left(\cos 2x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{16}$$

$-1 \leqq \cos 2x \leqq 1$ を考慮して，$\cos 2x=-1$ つまり $\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{2}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{-1}$ をとる.

また，最大値は $\cos 2x=\dfrac{1}{4}$ のとき $\boldsymbol{\dfrac{9}{16}}$ である.

3. $a_n = n^2 - n + 1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ があり，$b_k = a_{3k-1}$ と定められる数列を $\{b_k\}$ とする。ただし，n と k は 1 以上の整数とする。

b_k が 3 桁の整数であるとき, k の最小値を ℓ, 最大値を m とすると $\ell =$ $\boxed{\quad ⑦ \quad}$ であり, $m =$ $\boxed{\quad ⑧ \quad}$ である。このとき，$\displaystyle\sum_{k=\ell}^{m} b_k =$ $\boxed{\quad ⑨ \quad}$ となる。

解答

⑦ 4　⑧ 11　⑨ 3912

解説

$b_k = a_{3k-1} = (3k-1)^2 - (3k-1) + 1 = 9k^2 - 9k + 3.$

b_k は 3 桁の整数なので，$100 \leqq 9k^2 - 9k + 3 < 1000.$

少し変形すると，$97 \leqq 9k(k-1) < 997 \Longleftrightarrow 10 < \dfrac{97}{9} < 11 \leqq k(k-1) \leqq 110 < \dfrac{997}{9} < 111.$

よって $11 \leqq k(k-1) \leqq 110$. k に適当な値を代入しこれを満たす正の整数 k を探すと $4 \leqq k \leqq 11$ が得られる．したがって，$\boldsymbol{\ell = 4,\ m = 11}$ である．

恒等式 $k(k-1) = \dfrac{1}{3}\{(k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2)\}$ に注意すると，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=4}^{11} b_k &= \sum_{k=4}^{11}\{9k(k-1)+3\} \\
&= \sum_{k=4}^{11} 3\{(k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2)\} + \sum_{k=4}^{11} 3 \\
&= 3\{(5\cdot4\cdot3 - 4\cdot3\cdot2) \\
&\quad +(6\cdot5\cdot4 - 5\cdot4\cdot3) \\
&\quad +(7\cdot6\cdot5 - 6\cdot5\cdot4) \\
&\quad +\cdots \\
&\quad +(12\cdot11\cdot10 - 11\cdot10\cdot9)\} + 3\cdot8 \\
&= 3(12\cdot11\cdot10 - 4\cdot3\cdot2) + 24 \\
&= \mathbf{3912}
\end{aligned}$$

4. xy 座標平面上の 4 つの点が $(x_n,\ y_n)=\left(\cos\left(\theta+\dfrac{n\pi}{2}\right),\ c+\sin\left(\theta+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$, $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ で与えられるとき，これら 4 つの点を順に結んでできる正方形を考える。ただし， c は実数， $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。

(1) この正方形の 1 辺の長さは $\boxed{\quad ⑩ \quad}$ である。

(2) どのような θ $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ の値に対しても，この正方形が x 軸と共有点をもつ c の範囲は $\boxed{\quad ⑪ \quad}$ である。

(3) $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，この正方形が x 軸と共有点をもつ θ の範囲は $\boxed{\quad ⑫ \quad}$ である。

解答

⑩ $\sqrt{2}$　⑪ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq c\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　⑫ $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$

解説

(1) 4 点は点 $(0,\ c)$ を中心とする半径 1 の円に内接する正方形の 4 頂点となるので，この正方形の 1 辺の長さは $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ である．

(2) $\mathrm{A}_n(x_n,\ y_n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ とする． $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}$ に注意すると， A_0, A_1, A_2, A_3 のうち y 座標が最大となるのは A_1 ， y 座標が最小となるのは A_3 であるから，

$c\geqq0$ のときは A_3 の y 座標がどのような θ $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ の値に対しても 0 以下

$c<0$ のときは A_1 の y 座標がどのような θ $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ の値に対しても 0 以上

となるようにすればよい．したがって，

(ア) $c\geqq0$ のとき

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}_3\text{の } y \text{ 座標}) &= c+\sin\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\\ &= c-\cos\theta\end{aligned}$$

であるから， $c-\cos\theta\leqq0 \iff \cos\theta\geqq c$ がどのような θ $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ の値に対しても成り立てばよいが，この範囲の θ に対して $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\theta\leqq1$ であるから題意を満たす c の値の範囲は $c\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である．したがって $c\geqq0$ とあわせて $0\leqq c\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である．

(イ) $c<0$ のとき

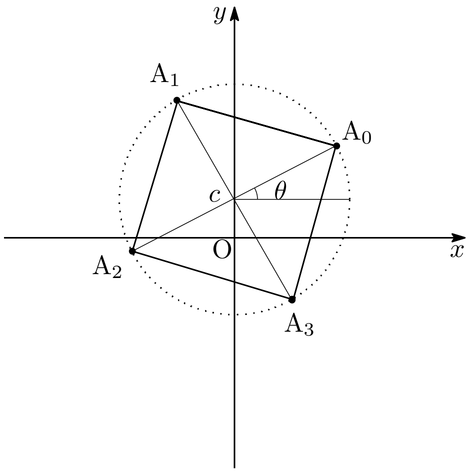
$$\begin{aligned}(\mathrm{A}_1\text{の } y \text{ 座標}) &= c+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= c+\cos\theta\end{aligned}$$

であるから， $c+\cos\theta\geqq0 \iff -\cos\theta\leqq c$ がどのような θ $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ の値に対しても成り立てばよいが，この範囲の θ に対して $-1\leqq\cos\theta<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから題意を満たす c の値の範囲は $c\geqq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である．したがって $c<0$ とあわせて $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq c<0$ である．

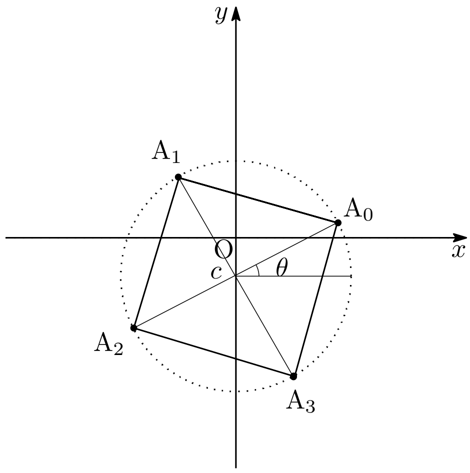
以上により，求める c の値の範囲は $\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq c \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ である.

(3)　$c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，(A_3 の y 座標)$\leqq 0$ となる θ の値の範囲を求めるとよい.

(A_3 の y 座標)$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta$ であるから，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta \leqq 0 \iff \cos\theta \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解いて，$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}}$.



$c \geqq 0$ のとき



$c<0$ のとき

Web で見る

5. 毎回，同じ確率で A，B，C，D のいずれかの記号が出るクジがある。

(1) 4 回引いて，4 種類がすべて出る確率は $\boxed{⑬}$ である。

(2) 5 回引いて，いずれか 2 種類のみが出る確率は $\boxed{⑭}$ である。

(3) 5 回目に初めて 4 種類がすべて出る確率は $\boxed{⑮}$ である。

解答

⑬ $\dfrac{3}{32}$　⑭ $\dfrac{45}{256}$　⑮ $\dfrac{9}{64}$

解説

(1) 2 回目以降，前回と異なる記号を引くことになるので，確率は $\dfrac{4}{4}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\mathbf{\dfrac{3}{32}}$.

(2) 5 回引いて 2 種類となる組み合わせは，○△△△△ か ○○△△△ の 2 パターンある.

(a) ○△△△△ のパターン

順序の並べ方が $\dfrac{5!}{4!}$ 通り.「○」と「△」に入れる記号の選び方が $4\cdot 3$ 通り.

よって $\dfrac{5!}{4!}\cdot 4\cdot 3=60$ 通り.

(b) ○○△△△ のパターン

順序の並べ方が $\dfrac{5!}{2!3!}$ 通り.「○」と「△」に入れる記号の選び方が $4\cdot 3$ 通り.

よって $\dfrac{5!}{2!3!}\cdot 4\cdot 3=120$ 通り.

以上より求める確率は $\dfrac{60+120}{4^5}=\mathbf{\dfrac{45}{256}}$.

別解

まず 2 種類の記号の選び方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り．各回ごとの 2 種類の記号からの選び方は 2 通りなので，その 2 種類の記号の 4 回の出方は 2^5-2 通り.

したがって求める確率は $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2(2^5-2)}{4^5}=\mathbf{\dfrac{45}{256}}$.

(3) はじめの 4 回に 3 種類出る出現パターンは，○○△□ である.

順番の並べ方が $\dfrac{4!}{2!}$ 通り.「○」と「△」と「□」に入れる記号の選び方が $4\cdot{}_3\mathrm{C}_2$ 通りである.

また，最後の 1 回は今までの 3 種類と異なる記号を引くことになるので，

求める確率は $\dfrac{\dfrac{4!}{2!}\cdot 4\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{4^4}\cdot\dfrac{1}{4}=\mathbf{\dfrac{9}{64}}$.

6. 次の計算をしなさい。

(1) $x>0$ のとき，$\dfrac{d}{dx}(x^{\cos x}) = \boxed{⑯}$

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{4}{x^7(x^{-6}+1)^{\frac{1}{3}}}dx = \boxed{⑰}$

解答

⑯ $x^{\cos x}\left(-\sin x\log x + \dfrac{\cos x}{x}\right)$　⑰ $-(x^{-6}+1)^{\frac{2}{3}}+C$（$C$ は積分定数）

解説

(1) $y=x^{\cos x}$ とおくと，$\log y = \cos x \log x$．両辺を x で微分すると，

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = -\sin x\log x + \cos x\cdot\frac{1}{x}$$
$$\iff \quad \frac{dy}{dx} = \boldsymbol{x^{\cos x}\left(-\sin x\log x + \frac{\cos x}{x}\right)}$$

(2) $t=(x^{-6}+1)^{\frac{1}{3}}$ とおくと $t^3 = x^{-6}+1$ より $3t^2\,dt = -6x^{-7}\,dx$．よって $\dfrac{dx}{x^7} = \dfrac{-t^2}{2}\,dt$.

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{4}{t}\cdot\frac{-t^2}{2}\,dt\\ &= \int(-2t)\,dt\\ &= -t^2+C\\ &= \boldsymbol{-(x^{-6}+1)^{\frac{2}{3}}+C}\ (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

講評

1. 「整数」（易）整数問題の基本的な問題である．完答しないといけない．
2. 「数学Ⅲの積分」（標準）$f(x)$ を微分して増減表を書こうとするとやや面倒になってしまうが，それでも難しくはない．
3. 「数列」（やや易）簡単ではあるが，正確な計算力が必要．
4. 「三角関数」（標準）動きが見えていないと苦しいが，それほど複雑な設定でもない．
5. 「確率」（標準）標準的なレベルの問題だが，差がつくだろう．
6. 「微分・積分計算」（やや易）⑴は対数微分法を知っていれば易しい．⑵は根号を置換する普通の置換積分だが，$\dfrac{1}{3}$ 乗という記法に慌てないこと．

基本～標準レベルの問題ばかりであった．易問での取りこぼしは極力避けたい．最低７割は欲しい．

医歯学部進学予備校 メビオ

〒540-0033 大阪市中央区石町2-3-12 ベルヴォア天満橋

TEL 06-6946-0109 FAX 06-6941-9416

http://www.mebio.co.jp/

MeBio Scholastics