久留米大学医学部 2016年度入学試験 解答速報 数学

2016年2月1日 実施

次の $\boxed{}$ に適切な解を入れよ。複数の解がある場合は，コンマで区切ってすべての解を記入すること。

1. 座標平面上の 2 直線 $mx - y + 1 = 0$, $x + my - m - 2 = 0$ の交点を P とする。ここで， m は実数とする。

（i）m の値が変化するとき，点 P が描く軌跡の方程式は $\boxed{\ ①\ }$ である。ただし，点 $(0,\ 1)$ を含まない。

（ii）m の値が $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq m \leqq 1$ のとき，点 P が描く曲線の長さは $\boxed{\ ②\ }$ である。

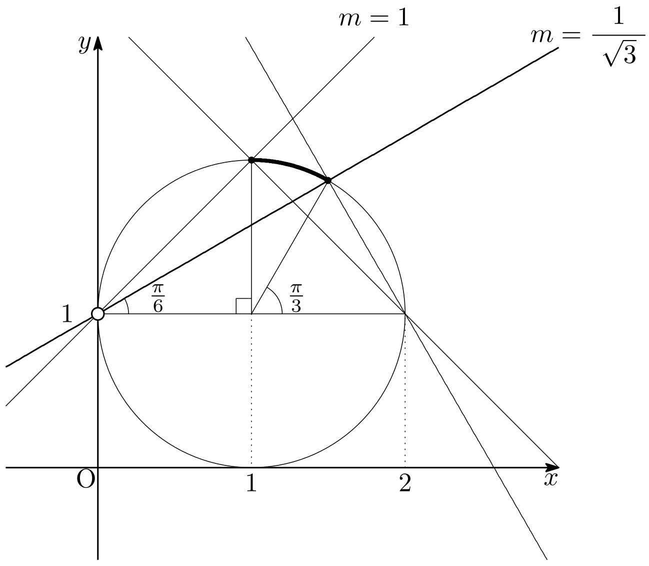
解答

① $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ② $\dfrac{\pi}{6}$

解説

（i）直線 $mx - y + 1 = 0$ および $x + my - m - 2 = 0 \iff (x-2) + m(y-1) = 0$ はそれぞれ m の値に関わらず定点 $(0,\ 1)$ および $(2,\ 1)$ を通り，かつ 2 直線は直交している．したがってその交点は $(0,\ 1)$, $(2,\ 1)$ を直径の両端とする円を描くことから，求める軌跡の方程式は $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ である．（ただし，直線 $mx - y + 1 = 0$, $(x-2) + m(y-1) = 0$ はそれぞれ m をどのようにとっても直線 $x = 0$ および $y = 1$ にはなれないので，その交点である $(0, 1)$ は除かなければならない.）

（ii）m が $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq m \leqq 1$ の範囲を動くとき，点 P が描く部分は下図の太線部分である．したがって求める長さは (半径 1 の円周の長さ) $\times \dfrac{1}{12} = \dfrac{\pi}{6}$



2. 正八面体について考える。(ii)〜(iv)において，回転すると重なる並び方は同じとする。

(i) 頂点の数は $\boxed{\quad ③ \quad}$ 個ある。

(ii) 頂点に 1, 2, $\cdots$ と順に番号を付けていくとき，番号の付け方は $\boxed{\quad ④ \quad}$ 通りある。

(iii) 2 つの面を赤に，残りの 6 つの面を白に塗るとき，塗り方は $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ 通りある。

(iv) 3 つの面を赤に，残りの 5 つの面を白に塗るとき，塗り方は $\boxed{\quad ⑥ \quad}$ 通りある。

解答

③ 6 ④ 30

⑤ 3 ⑥ 3

解説

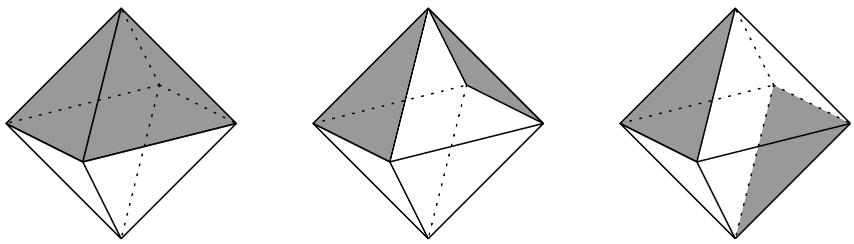
③ 6 個（下図の通り）

④ 番号 1 の向かいの頂点が 5 通り．残りの 4 点は円順列として考えて $\dfrac{4!}{4} = 6$ 通り．したがって $5 \times 6 = 30$ 通り．

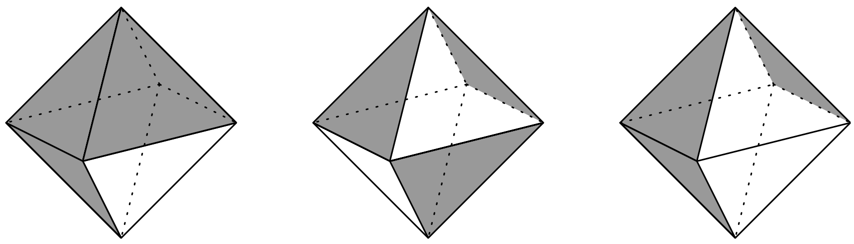
⑤ 3 通り（下図参照）

⑥ 3 通り（下図参照）

(iii) の塗り方



(iv) の塗り方



3. 次の計算をしなさい。対数は自然対数とする。

$$\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx = \boxed{\quad ⑦ \quad}\,, \qquad \int_1^{\sqrt{3}} 2x\log(1+x^2)\,dx = \boxed{\quad ⑧ \quad}$$

解答

⑦ $\dfrac{76}{15}$　　　　⑧ $6\log 2 - 2$

解説

⑦ $\sqrt{1+x} = t$ と置換する.

$$\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int_1^2 \frac{(t^2-1)^2}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int_1^2 \left(t^4 - 2t^2 + 1\right)\,dt = 2\left[\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t\right]_1^2 = \frac{76}{15}$$

⑧ $1 + x^2 = t$ と置換する.

$$\int_1^{\sqrt{3}} 2x\log(1+x^2)\,dx = \int_2^4 \log t\,dt = \Big[t\log t - t\Big]_2^4 = 6\log 2 - 2$$

4. 座標平面上で，関数 $f(x)=\sqrt{6-x}$ で表される曲線 $C:y=f(x)$ を考える。$4 \leqq t \leqq 5$ を満たす実数 t に対して，曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ と $(t,\ 0)$，$(2,\ 0)$ および $(2,\ f(t))$ の 4 つの点を頂点とする四角形の面積を $S(t)$ とする。

(i) $S(t)$ を t を用いて表すと $\boxed{\text{⑨}}$ となる。

(ii) $S(t)$ は $t=\boxed{\text{⑩}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{⑪}}$ をとり，$t=\boxed{\text{⑫}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{⑬}}$ をとる。

(iii) 区間 $[4,\ 5]$ を n 等分してその端点と分点を小さい順に $t_0=4,\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n=5$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S(t_k)$ の値を求めると $\boxed{\text{⑭}}$ となる。ただし，n は正の整数とする。

解答

⑨ $(t-2)\sqrt{6-t}$　　⑩ $\dfrac{14}{3}$　　⑪ $\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$

⑫ 4　　⑬ $2\sqrt{2}$　　⑭ $\dfrac{2}{15}(28\sqrt{2}-17)$

解説

(i) この四角形は長方形である．横は $2-t$，縦は $f(t)$ なので $S(t)=(t-2)\sqrt{6-t}$.

(ii) $f(t)=(S(t))^2=(t-2)^2(6-t)$ $(4 \leqq t \leqq 5)$ とおくと，$f'(t)=2(t-2)(6-t)-(t-2)^2=(t-2)(14-3t)$ となるので，増減表は以下の通りである．

t	4	$\cdots$	$\dfrac{14}{3}$	$\cdots$	5
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	8	$\nearrow$	$\dfrac{256}{27}$	$\searrow$	9

以上より，$t=\dfrac{14}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$，$t=4$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S(t_k)=\int_4^5 S(t)\,dt=\int_{\sqrt{2}}^{1}(4-u^2)u\cdot(-2u)\,du$　　($u=\sqrt{6-t}$ と置換した)

$$=2\int_1^{\sqrt{2}}(4u^2-u^4)\,du=2\left[\frac{4}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{2}{15}(28\sqrt{2}-17).$$

5. 数列 $\{a_n\}$ が $3(a_{n+1})^2=(a_n)^3$ の関係を満たしているとする。ただし，a_n は正の実数で，n は正の整数とする。

(i) $\log a_n$ を n と a_1 を用いて表すと $\boxed{⑮}$ となる。

(ii) 数列 $\{a_n\}$ が収束するような a_1 の値の範囲は $\boxed{⑯}$ である。

解答

⑮ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\log\dfrac{a_1}{3}+\log 3$　　⑯ $0<a_1\leqq 3$

解説

(i) $3(a_{n+1})^2=(a_n)^3$ において両辺の対数をとると $\log 3+2\log a_{n+1}=3\log a_n$.
ここで $b_n=\log a_n$ とおくと，$2b_{n+1}=3b_n-\log 3$ となり，これを変形すると

$$b_{n+1}-\log 3=\frac{3}{2}(b_n-\log 3)=\left(\frac{3}{2}\right)^2(b_{n-1}-\log 3)=\cdots=\left(\frac{3}{2}\right)^n(b_1-\log 3).$$

これより b_n の一般項は $b_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}(b_1-\log 3)+\log 3$ となるので，

$$\log a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\log\frac{a_1}{3}+\log 3.$$

(ii) (i)をさらに変形すると $\log a_n=\log\left\{3\cdot\left(\dfrac{a_1}{3}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}\right\}$ となるので，

a_n の一般項は $a_n=3\cdot\left(\dfrac{a_1}{3}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$.

ここで $n\to\infty$ のとき $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\to\infty$ であるので，a_n が収束する条件は $-1<\dfrac{a_1}{3}\leqq 1$ である.

$a_n>0$ を考慮して答は $0<a_1\leqq 3$.

6. 平面上に三角形 △ABC と点 P があり，$9\overrightarrow{\mathrm{PA}}+4\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}$ を満たしている。三角形 △PAB, △PBC，△PCA の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とするとき，面積比を求めると $S_1:S_2:S_3=$ $\boxed{⑰}$ となる。

解答

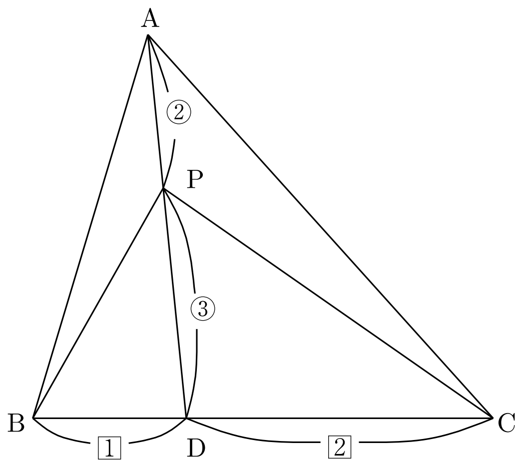
⑰ 2 : 9 : 4

解説

$$(\text{与式}) \iff -9\overrightarrow{\mathrm{AP}}+4(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\overrightarrow{0}$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{15}=\frac{2}{5}\left(\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right)$$

より，BC を 1 : 2 に内分する点を D とすると，点 P は AD を 2 : 3 に内分する点である（図参照）.



△ABC の面積を S とすると，

$S_1=S\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}S$,

$S_2=\frac{3}{5}S$,

$S_3=S\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}S$ より，

$S_1:S_2:S_3=2:9:4$.

注釈

△ABC と点 P に対し，$a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}$ が成り立つとき，$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=|a|:|b|:|c|$ が成り立つ.

講評

1. 「軌跡」（標準）具体的に交点を m で表してしまうと大変なことになる．
2. 「場合の数」（やや難）(iii)，(iv)は数えるのにセンスが要る．
3. 「積分計算」（やや易）ごくごく標準的な置換積分，ここは落としたくない．
4. 「関数の増減，区分求積法」（標準）難しくはないが計算量がほどほどにある．こういう問題は意外に差がつく．
5. 「漸化式，数列の極限」（やや難）誘導に従えば普通に解ける．対数の変形をスムーズにしたいところ．最後の収束条件は落としやすい．
6. 「平面ベクトル」（易）有名事実．この問題は是非完答で！

昨年度と比べるとほぼ同レベルかやや易しいくらい．全体に標準的な問題が多く差がつきやすい．
内容が深い問題は少なく，計算中心のセット．ボーダーは 7 割 5 分あたりか．

医歯学部進学予備校 メビオ
〒540-0033 大阪市中央区石町2-3-12 ベルヴォア天満橋
TEL 06-6946-0109 FAX 06-6941-9416
http://www.mebio.co.jp/