医学部進学予備校 メビオ 解答速報

近畿大学医学部（推薦） 数学

2018年11月18日実施

1 四角形 ABCD において，$AB = BC = CD = 1$，$AD > 1$，$\angle ABC = \dfrac{\pi}{2}$，$\angle DAB = \dfrac{5}{12}\pi$ とする。

(1) $AD =$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) 辺 AD の延長と辺 BC の延長の交点を E とすると，$CE =$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

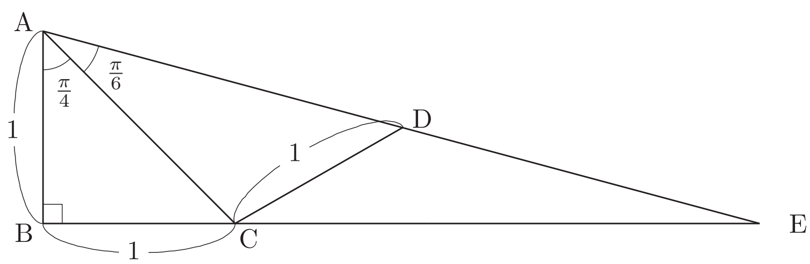
(3) $\angle BCD =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(4) 四角形 ABCD の面積は $\boxed{\text{エ}}$ である。

解答

ア $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$　イ $1+\sqrt{3}$　ウ $\dfrac{5}{6}\pi$　エ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$

解説



(1) $AD = x$ とする．$\angle BAC = \dfrac{\pi}{4}$ であるから，$\angle CAD = \dfrac{5}{12}\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6}$ である．従って，$\triangle ACD$ について余弦定理を適用すると，

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos \angle CAD$$

$$\therefore\ 1 = 2 + x^2 - 2\sqrt{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

これを整理すると

$$x^2 - \sqrt{6}x + 1 = 0 \quad \text{より} \quad x = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2}$$

与条件より $AD = x > 1$ であるから，$AD = x = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$.

(2) $\dfrac{5}{12}\pi = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$ なので，加法定理を用いると $\tan \dfrac{5}{12}\pi = 2+\sqrt{3}$ が得られる．従って，

$$BE = AB \tan \frac{5}{12}\pi = 2 + \sqrt{3}$$

であるから，

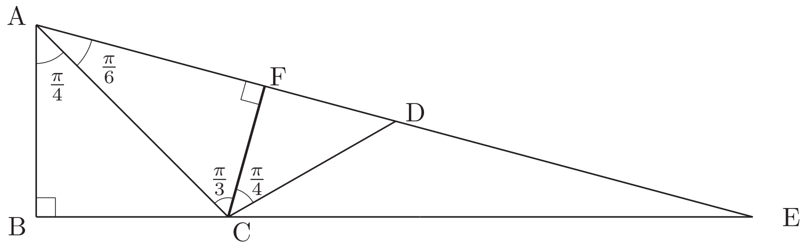
$$\mathrm{CE} = \mathrm{BE} - \mathrm{BC} = (2+\sqrt{3}) - 1 = \mathbf{1+\sqrt{3}}$$

(3)　$\mathrm{AE} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BE}^2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$ となるので，$\mathrm{DE} = \mathrm{AE} - \mathrm{AD} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ が分かる．ゆえに，$\triangle\mathrm{CDE}$ について余弦定理を適用すると，

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{DCE} &= \frac{\mathrm{CD}^2 + \mathrm{CE}^2 - \mathrm{DE}^2}{2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{CE}} \\ &= \frac{1^2 + (1+\sqrt{3})^2 - \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2\cdot 1\cdot(1+\sqrt{3})} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となるので $\angle\mathrm{DCE} = \dfrac{\pi}{6}$．従って $\angle\mathrm{BCD} = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \boldsymbol{\dfrac{5}{6}\pi}$.

別解



点 C から線分 AD に下ろした垂線の足を F とすると，$\mathrm{AF} = \mathrm{AC}\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ と分かるので，$\mathrm{FD} = \mathrm{AD} - \mathrm{AF} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ も分かる．ゆえに $\angle\mathrm{DCF} = \dfrac{\pi}{4}$ なので，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BCD} &= \angle\mathrm{ACB} + \angle\mathrm{ACF} + \angle\mathrm{DCF} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{6}\pi}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(\text{四角形 ABCD の面積}) &= (\text{三角形 ABC の面積}) + (\text{三角形 ACD の面積}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \mathbf{\frac{3+\sqrt{3}}{4}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 多項式 $f(x)$ に対し， $S[f(x)]=\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^2\,dx$ とおく。

(1) $S[1+ax]$ を最小にするような a の値 a_0 を求めよ。また，そのときの最小値 $S[1+a_0x]$ を求めよ。

(2) (1) で求めた a_0 に対し， $S[1+a_0x+bx^2]$ を最小にするような b の値 b_0 を求めよ。また，そのときの最小値 $S[1+a_0x+b_0x^2]$ を求めよ。

(3) $S[1+Ax+Bx^2]$ を最小にする A, B の値の組を $(A,\ B)=(A_0,\ B_0)$ とする。A_0, B_0 の値を求めよ。また，そのときの最小値 $S[1+A_0x+B_0x^2]$ を求めよ。

解答

(1) $a_0=-\dfrac{3}{2}$, $S[1+a_0x]=\dfrac{1}{4}$

(2) $b_0=\dfrac{5}{24}$, $S[1+a_0x+b_0x^2]=\dfrac{139}{576}$

(3) $A_0=-4$, $B_0=\dfrac{10}{3}$, $S[1+A_0x+B_0x^2]=\dfrac{1}{9}$

解説

(1)

$$\begin{aligned}S[1+ax]&=\int_0^1(1+ax)^2dx=\int_0^1(1+2ax+a^2x^2)dx\\&=\left[x+ax^2+\frac{1}{3}a^2x^3\right]_0^1=1+a+\frac{1}{3}a^2\\&=\frac{1}{3}\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

従って $\boldsymbol{a_0=-\dfrac{3}{2}}$, $\boldsymbol{S[1+a_0x]=\dfrac{1}{4}}$ である.

(2)

$$\begin{aligned}S[1+ax+bx^2]&=\int_0^1(1+ax+bx^2)^2dx\\&=\int_0^1\left(1+a^2x^2+b^2x^4+2ax+2bx^2+2abx^3\right)dx\\&=\left[x+\frac{1}{3}a^2x^3+\frac{1}{5}b^2x^5+ax^2+\frac{2}{3}bx^3+\frac{1}{2}abx^4\right]_0^1\\&=1+\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{5}b^2+a+\frac{2}{3}b+\frac{1}{2}ab\end{aligned}$$

この式に $a=a_0=-\dfrac{3}{2}$ を代入して

$$S[1+a_0x+bx^2]=\frac{1}{5}b^2-\frac{1}{12}b+\frac{1}{4}=\frac{1}{5}\left(b-\frac{5}{24}\right)^2+\frac{139}{576}$$

従って $\boldsymbol{b_0=\dfrac{5}{24}}$, $\boldsymbol{S[1+a_0x+b_0x^2]=\dfrac{139}{576}}$ である.

(3)　(2) の計算結果より

$$\begin{aligned} S[1+Ax+Bx^2] =& 1+\frac{1}{3}A^2+\frac{1}{5}B^2+A+\frac{2}{3}B+\frac{1}{2}AB \\ =& \frac{1}{3}A^2+\frac{1}{2}(B+2)A+\frac{1}{5}B^2+\frac{2}{3}B+1 \\ =& \frac{1}{3}\left\{A+\frac{3}{4}(B+2)\right\}^2+\frac{1}{80}B^2-\frac{1}{12}B+\frac{1}{4} \\ =& \frac{1}{3}\left\{A+\frac{3}{4}(B+2)\right\}^2+\frac{1}{80}\left(B-\frac{10}{3}\right)^2+\frac{1}{9} \end{aligned}$$

これより $B=B_0=\mathbf{\dfrac{10}{3}}$, $A=A_0=-\dfrac{3}{4}(B+2)=\mathbf{-4}$ のときに $S[1+Ax+Bx^2]$ は最小値 $S[1+A_0x+B_0x^2]=\mathbf{\dfrac{1}{9}}$ を取ることが分かる.

$\boxed{\text{別解}}$

$F=1+\dfrac{1}{3}A^2+\dfrac{1}{5}B^2+A+\dfrac{2}{3}B+\dfrac{1}{2}AB$ と置く. F が最小になるためには A の関数とみて $\dfrac{dF}{dA}=0$, B の関数とみて $\dfrac{dF}{dB}=0$ の両方の成り立つことが必要である. この連立方程式を解くと少し楽に A, B が求められる（いわゆる偏微分の考え方である).

$\boxed{\text{注釈}}$

この問題には次のような背景がある. 区間 $[0,\ 1]$ で連続な関数の集合を S とすると $f,\ g\in S$ に対し内積 $\langle f,\ g\rangle$ を $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$ で定義することができる. その場合 $f_0=1$, $f_1=x$ に対して $|f_0+af_1|$ が最小になるには $\langle f_0+af_1,\ f_1\rangle=0$ が必要十分であるから, a_0 は $a_0=-\dfrac{\langle f_0,\ f_1\rangle}{|f_1|^2}$ と求められるのである. b_0 や A_0, B_0 もベクトルの最小値と考えて直交条件に帰着させることができる（残念ながら最小値は実際に計算するしかない).

3 数列 $\{a_n\}$ の一般項を $a_n = \dfrac{n^3}{2^n}$ とする。また，数列 $\{b_n\}$ を $b_1 = a_1$ および $b_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ $(n \geqq 2)$ によって定める。必要なら $\log_{10} 2 = 0.30103,\ \log_{10} 3 = 0.47712,\ \log_{10} 7 = 0.84510$ を用いよ。

(1) $n \geqq 2$ に対し $0 < b_{n+1} < b_n$ であることを示せ。

(2) a_n が最大となるような自然数 n を M とおく。 M を求めよ。

(3) $a_M {b_{M+1}}^{n-M} < 10^{-3}$ を満たす最小の自然数 n を N とおく。N を求めよ。

解答

(1) $b_n = \dfrac{n^3}{2(n-1)^3}$ であるから， $n \geqq 2$ となるすべての自然数 n に対して $b_n > 0$ が成り立つことは明らかである．次に，

$$
\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\dfrac{n^3}{2(n-1)^3}}{\dfrac{(n+1)^3}{2n^3}} \\
&= \frac{n^6}{(n+1)^3(n-1)^3} \\
&= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^3 \\
&> 1
\end{aligned}
$$

であることから， $b_n > b_{n+1}$ がわかる．以上により $n \geqq 2$ に対して $0 < b_{n+1} < b_n$ が示された．

(2) (1) より数列 $\{b_n\}$ は $n \geqq 2$ に関して単調減少であることに注意しておく．ここで，

$$
\begin{aligned}
b_2 &= \frac{2^3}{2} = 4 > 1 \Longrightarrow a_1 < a_2 \\
b_3 &= \frac{3^3}{2 \cdot 2^3} = \frac{27}{16} > 1 \Longrightarrow a_2 < a_3 \\
b_4 &= \frac{4^3}{2 \cdot 3^3} = \frac{32}{27} > 1 \Longrightarrow a_3 < a_4 \\
b_5 &= \frac{5^3}{2 \cdot 4^3} = \frac{125}{128} < 1 \Longrightarrow a_4 > a_5
\end{aligned}
$$

であり， $\{b_n\}$ は単調に減少する数列であるから， $b_n < 1 \Longrightarrow a_{n-1} > a_n$ $(n \geqq 5)$ もわかるので， a_n が最大となる自然数は $M = \mathbf{4}$ である．

(3)　$M=4$ より

$$\begin{aligned}
&a_4{b_5}^{n-4} < 10^{-3} \\
\iff& \frac{4^3}{2^4}\left(\frac{5^3}{2\cdot 4^3}\right)^{n-4} < 10^{-3} \\
\iff& 5^{3(n-4)}\cdot 2^{-7(n-4)+2} < 10^{-3} \\
\iff& 3(n-4)\log_{10}5 - 7(n-4)\log_{10}2 + 2\log_{10}2 < -3 \\
\iff& (n-4)(3\log_{10}5 - 7\log_{10}2) < -3 - 2\log_{10}2 \\
\iff& (n-4)\{3(1-\log_{10}2) - 7\log_{10}2\} < -3 - 2\log_{10}2 \\
\iff& (n-4)(3 - 10\log_{10}2) < -3 - 2\log_{10}2 \\
\iff& (n-4)\times(-0.0103) < -3.60206 \\
\iff& n-4 > \frac{3.60206}{0.0103} \fallingdotseq 349.71\cdots
\end{aligned}$$

であるから，$n > 353.71\cdots$ となるので，これをみたす最小の自然数は $N = \mathbf{354}$ である．

講評

$\boxed{1}$［図形と計量］（標準）四角形において，余弦定理などを用いて辺長や角度などの諸量を求める問題．解法の選択次第で処理に要する時間が大きく変わりそう．

$\boxed{2}$［数学IIの積分］（標準）ひたすら地道に計算して，平方完成を繰り返すだけである．途中の計算間違いが後の問題に影響するので，慎重に進める必要がある．ひらめきは必要なく，とにかく計算の正確さが求められている．

$\boxed{3}$［数列・対数計算］（やや難）(1) の誘導に乗って (2) で数値を代入していくことが出来たかどうかで差がつきそう．(3) の難易度は高くはないが計算がやや重く，完答するには正確な処理力が必要とされる．

昨年度に比べて易化した．$\boxed{1}$ $\boxed{2}$は完答に近いくらいまで仕上げたい．$\boxed{3}$でどれだけしっかり議論できたかが勝敗を分ける．目標は 80%.