近畿大学医学部 2018年度（後期）入学試験 解答速報 数学

2018年2月27日 実施

1 正十角形において，次の問いに答えよ．

(1) 正十角形の内部で交わる 2 本の対角線は何組あるか．

(2) 3 つの頂点を結んでできる二等辺三角形は何個あるか．

(3) 3 つの頂点を結んでできる三角形のうち，互いに合同でないのは何個あるか．

(4) どの 2 つも隣り合わないような 3 つの頂点の選び方は何通りあるか．

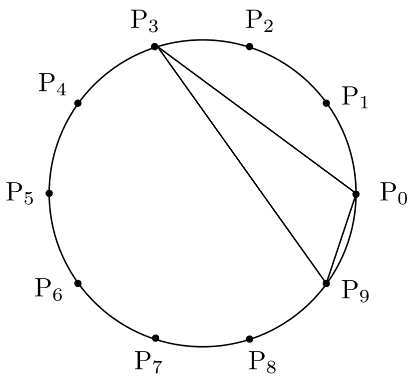
(5) 頂点を 2 つずつ結んで 5 本の線分を作るとき，どの 2 本も共有点をもたない選び方は何通りあるか．

解答

(1) 210　(2) 40　(3) 8　(4) 50　(5) 42

解説

正十角形が円に内接していると考える．頂点を P_0, P_1, $\cdots$, P_9 とおく．隣り合う点の作る弧の長さを 1 としてもよい．その場合円周の長さは 10 ということになる．



3 つの頂点 ABC を結んで出来る三角形に対し，C を含まない 弧 AB の長さを $l(\mathrm{AB})$ と表すことにする．そして三角形 ABC を，弧 $[l(\mathrm{AB}),\ l(\mathrm{BC}),\ l(\mathrm{CA})]$ を持つ三角形と呼ぶことにする．例えば上図における三角形 $P_0P_3P_9$ は $l(P_0P_3) = 3$, $l(P_3P_9) = 6$, $l(P_9P_0) = 1$ であるから，弧 $[1,\ 3,\ 6]$ を持つ三角形ということになる．

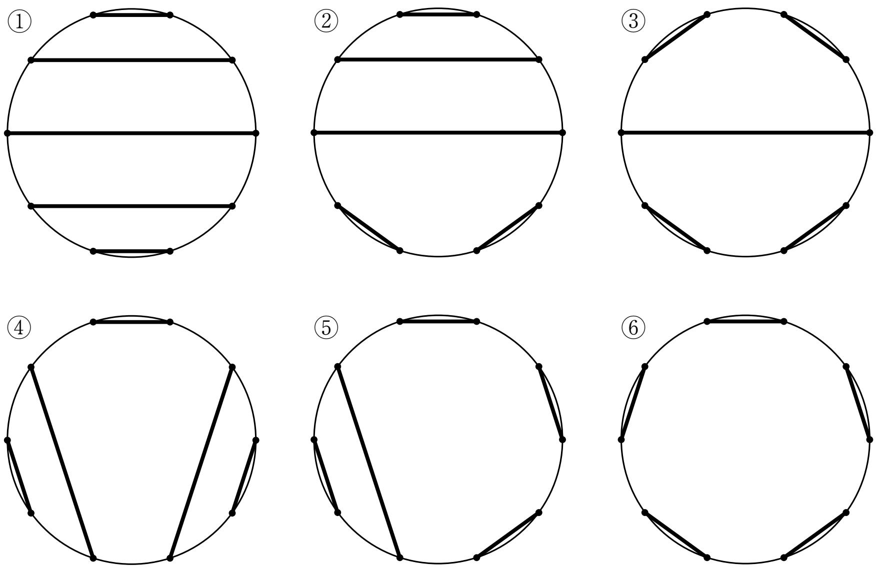
(1) 内部で交わる 2 本の対角線を選ぶことは, 10 頂点から 4 点を選ぶことに等しい．従って ${}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$ 組．

(2) 二等辺三角形になるのは弧が $[1,\ 1,\ 8]$, $[2,\ 2,\ 6]$, $[3,\ 3,\ 4]$, $[4,\ 4,\ 2]$ のいずれかになる場合である．それぞれが 10 個ずつ存在するので，答は合計 40 個．

(3) 二等辺三角形にならない場合は $[1,\ 2,\ 7]$, $[1,\ 3,\ 6]$, $[1,\ 4,\ 5]$, $[2,\ 3,\ 5]$ の 4 つがあるから (2) と合わせて答は 8 個．

(4) どの 2 つの頂点も隣り合わないのは長さ 1 の弧を持たない場合である．そのうち $[2,\ 2,\ 6]$, $[3,\ 3,\ 4]$, $[4,\ 4,\ 2]$ は二等辺三角形で 10 個ずつ存在し．$[2,\ 3,\ 5]$ は鏡像関係にあるものを含めて 20 個存在するから，合計で 50 個．

(5)　結び方には，下図に示す 6 つのパターンが存在する．それぞれ回転も考慮すると，①, ③は 5 通りずつ，②, ④, ⑤は 10 通りずつ，⑥は 2 通りであるから，答は $5 \times 2 + 10 \times 3 + 2 = 42$ 通り．

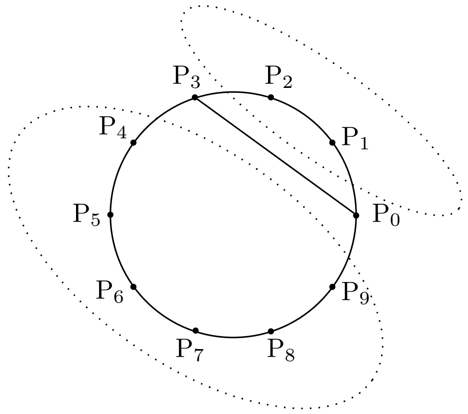


別解

正十角形に限らず，自然数 n に対し凸 $2n$ 角形の頂点を，交わらない n 本の線分で分ける分け方を a_{2n} 通りとする．求めたいのは a_{10} ということになる．$a_4 = 2$ であることは容易にわかる．簡単のため $a_0 = 1, a_2 = 1$ とおいておく．

P_0 が P_k と結ばれているとする．

P_1，P_2，$\cdots$，P_{k-1} の $k-1$ 点を交わらない線分で結び，P_{k+1}，P_{k+2}，$\cdots$，P_{2n-1} の $2n-k-1$ 点を交わらない線分で結べばよい．従って k は奇数でなければならず，その結び方は $a_{k-1} \cdot a_{2n-k-1}$ であることがわかる．



以上より

$$
\begin{aligned}
a_4 &= a_0 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\
a_6 &= a_0 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_2 + a_4 \cdot a_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5 \\
a_8 &= a_0 \cdot a_6 + a_2 \cdot a_4 + a_4 \cdot a_2 + a_6 \cdot a_0 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14 \\
a_{10} &= a_0 \cdot a_8 + a_2 \cdot a_6 + a_4 \cdot a_4 + a_6 \cdot a_2 + a_8 \cdot a_0 = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42
\end{aligned}
$$

答は 42 通り．

注釈

高度な数学を使えば $a_{2n} = 2^n \dfrac{(2n-1)!!}{(n+1)!}$ であることが証明出来る．ここで $n!!$ は 2 つ飛ばしの階乗記号で，本問の場合 $a_{10} = 2^5 \dfrac{9!!}{6!} = \dfrac{2^5 \times 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 42$ となる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 四面体 OABC があり，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA} = 2$，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 3$ とする．頂点 A から平面 OBC へ下ろした垂線の足を H，三角形 ABC の重心を G とし，OG と AH の交点を P とする．さらに直線 CP と平面 OAB の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ として，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) 四面体 OBCQ の体積を求めよ．

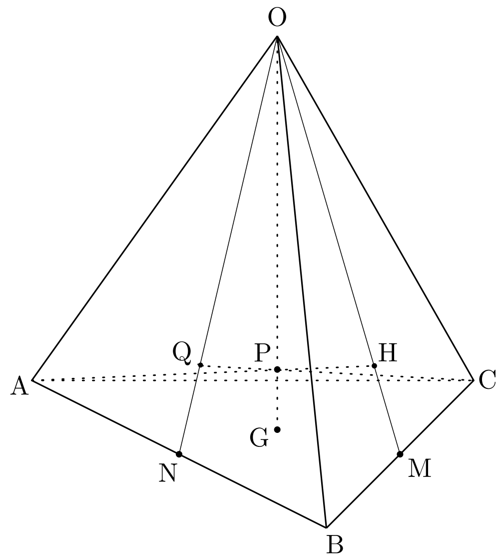
$\boxed{\text{解答}}$

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{7}{16}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{7}{23}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{7}{16}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

(3) $\dfrac{7\sqrt{23}}{48}$

$\boxed{\text{解説}}$



(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2$
$= |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2$ より，
$4 = 9 - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + 9$．従って，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \mathbf{7}$$

(2) 四面体の対称性を考慮すると，H が平面 OBC 上にあることから $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s(\vec{b} + \vec{c})$ とおける．$\mathrm{AH} \perp (\text{平面 OBC})$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\iff (-\vec{a} + s\vec{b} + s\vec{c}) \cdot \vec{b} = 0$$

$$\iff -\vec{a} \cdot \vec{b} + s|\vec{b}|^2 + s\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\iff -7 + 9s + 7s = 0$$

$$\iff s = \frac{7}{16}$$

従って，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{7}{16}(\vec{b} + \vec{c})}$$

また，直線 OH と BC の交点を M とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{7}{8}\,\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} = \frac{7}{8}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

であるから，OH : HM = 7 : 1 である．よって，△OGM と直線 AH に対するメネラウスの定理から，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{HM}} \cdot \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{AG}} \cdot \frac{\mathrm{GP}}{\mathrm{PO}} = 1 \\
\iff &\frac{7}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\mathrm{GP}}{\mathrm{PO}} = 1 \\
\iff &\mathrm{GP} : \mathrm{PO} = 2 : 21
\end{aligned}
$$

従って，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}} = \frac{21}{23}\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \boldsymbol{\frac{7}{23}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}$$

また，四面体の対称性から 4 点 O, A, B, Q と 4 点 O, B, C, H の位置関係は一致しているので，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{7}{16}(\vec{a} + \vec{b})}$$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2 = \dfrac{1}{9}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = \dfrac{23}{3}$ より $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}| = \dfrac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}$.

また △ABC の面積は $\dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ であるから，

四面体 OABC の体積を V_1 とすると $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{23}}{3}$.

直線 OQ と AB の交点を N とする．AN : NB = 1 : 1，OQ : QN = 7 : 1 を考慮すると，四面体 OBCQ の体積は

$$V_1 \times \frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{AB}} \times \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{ON}} = V_1 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} = \boldsymbol{\frac{7}{48}\sqrt{23}}$$

3 x の 3 次関数 $y = x^3 - 3x^2$ で表される曲線を C とする．C 上の点 A_n から，A_n とは異なる点 A_{n+1} を接点とする接線を引くことができるとき，A_n の x 座標を a_n，A_{n+1} の x 座標を a_{n+1}，接線を l_n とする．$a_1 = 3$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) a_n を n を用いて表せ．

(2) 接線 l_n の傾きを α_n とするとき，α_n を n を用いて表せ．

(3) 接線 l_n と曲線 C で囲まれた部分の面積を S_n とするとき，S_n を n を用いて表せ．

解答

$f(x) = x^3 - 3x^2$ とおく．

(1) $f'(x) = 3x^2 - 6x$ であるから，$(t,\ t^3 - 3t^2)$ における接線の方程式は，

$$y = (3t^2 - 6t)(x - t) + t^3 - 3t^2 = (3t^2 - 6t)x - 2t^3 + 3t^2$$

である．これが $\mathrm{A}_n(a_n,\ {a_n}^3 - 3{a_n}^2)$ を通るとき，

$$\begin{aligned} {a_n}^3 - 3{a_n}^2 &= (3t^2 - 6t)a_n - 2t^3 + 3t^2 \\ \iff (t - a_n)^2(2t + a_n - 3) &= 0 \end{aligned}$$

であるから，$t = a_n,\ \dfrac{-a_n + 3}{2}$ となる．$a_{n+1} \fallingdotseq a_n$ より，

$$a_{n+1} = \frac{-a_n + 3}{2} \iff a_{n+1} - 1 = -\frac{1}{2}(a_n - 1)$$

となるので，$b_n = a_n - 1$ とおくと，

$$b_1 = 2, \quad b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n$$

より $b_n = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ である．したがって $\boldsymbol{a_n = 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 1}$ である．

別解

直線 l_n の方程式を $y = px + q$ とおくと，方程式 $x^3 - 3x^2 = px + q$ の 3 つの解は a_{n+1}，a_{n+1}，a_n である．解と係数の関係より $a_{n+1} + a_{n+1} + a_n = 3$ であるから，これより漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{-a_n + 3}{2}$ を導くこともできる．

(2) 接線 l_n は A_{n+1} における接線なので，

$$\begin{aligned} \alpha_n &= f'(a_{n+1}) \\ &= 3a_{n+1}(a_{n+1} - 2) \\ &= 3 \cdot \left\{2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1\right\} \cdot \left\{2\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right\} \\ &= \boldsymbol{3\left(\frac{1}{2^{2n-2}} - 1\right)} \end{aligned}$$

(3) 直線 l_n の方程式を $y=px+q$ とおくと，

$$\begin{aligned}
S_n &= \left|\int_{a_n}^{a_{n+1}} \{(x^3-3x^2)-(px+q)\}\,dx\right| \\
&= \left|\int_{a_n}^{a_{n+1}} (x-a_n)(x-a_{n+1})^2\,dx\right| \\
&= \left|\frac{1}{12}(a_{n+1}-a_n)^4\right| \\
&= \left|\frac{1}{12}\left\{2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1-2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right\}^4\right| \\
&= \frac{27}{4}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|^4 \\
&= \boldsymbol{\frac{27}{2^{4n-2}}}
\end{aligned}$$

講評

$\boxed{1}$［場合の数］（やや難）小問 5 題はどの問題も間違えやすい（数え落としやすい）部分があり，差がつきそう．

$\boxed{2}$［空間ベクトル］（標準）空間ベクトルの問題としては典型的．丁寧に計算して完答を狙いたいところ．

$\boxed{3}$［数Ⅱ微積分］（標準）3 次関数と数列の融合問題．問題文をしっかり読み込むことさえできれば，内容は平易．この問題も完答を狙いたい．

昨年度に比べて難化した．$\boxed{1}$に時間をとられ過ぎたらやられる．$\boxed{1}$をそこそこで切り上げて「いかに$\boxed{2}$, $\boxed{3}$に時間をうまく回すことができるか」が勝負を分けそう．

目標は 70%．