近畿大学医学部 2018年度（前期）入学試験 解答速報 数学

2018年1月21日 実施

$\boxed{1}$

(1)　関数 $f(x)=27^x-9^x-3^{x+1}+3$ について考える。$f(x)=0$ の解は $x=\boxed{\text{ア}}$ である。また，関数 $g(x)=f(x)+f(-x)$ とおくとき，$g(x)$ が最小となる x の値は $x=\boxed{\text{イ}}$ であり，その最小値は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2)　2 つの自然数 m,n の最大公約数を G，最小公倍数を L とし，$G<m<n<L$ とする。

$$\begin{cases} 2\log_3 L-\log_3 G=3+5\log_3 2 \\ \log_2 L+\log_2 G=7+3\log_2 3 \end{cases}$$

のとき，$m=\boxed{\text{エ}}$，$n=\boxed{\text{オ}}$ である。

(3)　直線 $y=ax+b$ を ℓ とする。ただし，a,b は実数とする。直線 ℓ 上のどのような点 (x,y) に対しても，点 $(5x+6y,x+4y)$ もまた ℓ 上にあるとする。このとき，$(a,b)=\left(\boxed{\text{カ}},\boxed{\text{キ}}\right)$，$\left(\boxed{\text{ク}},\boxed{\text{ケ}}\right)$ である。ただし，$\boxed{\text{カ}}<\boxed{\text{ク}}$ とする。

解答

(1)　ア. $0,\ \dfrac{1}{2}$　イ. 0　ウ. 0

(2)　エ. 48　オ. 72

(3)　カ. $-\dfrac{1}{2}$　キ. 0　ク. $\dfrac{1}{3}$　ケ. 0

解説

(1)　$3^x=s$ とすると，

$$\begin{aligned} f(x)&=s^3-s^2-3s+3 \\ &=(s^2-3)(s-1) \end{aligned}$$

となるので，$f(x)=0$ より $s=\pm\sqrt{3},\ 1$ となる．$s=3^x>0$ に注意して，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2},\ 0}$.

また　$f(-x)=s^{-3}-s^{-2}-3s^{-1}+3$　であるから，

$$\begin{aligned} g(x)&=f(x)+f(-x) \\ &=s^3+s^{-3}-\left(s^2+s^{-2}\right)-3\left(s+s^{-1}\right)+6 \end{aligned}$$

となる．$t=s+s^{-1}$ とおくと，

$$\begin{aligned} s^2+s^{-2} &= \left(s+s^{-1}\right)^2-2ss^{-1} \\ &= t^2-2 \\ s^3+s^{-3} &= \left(s+s^{-1}\right)^3-3ss^{-1}\left(s+s^{-1}\right) \\ &= t^3-3t \end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned} g(x) &= t^3-3t-(t^2-2)-3t+6 \\ &= t^3-t^2-6t+8 \end{aligned}$$

となる．$h(t)=t^3-t^2-6t+8$ とおく．$s=3^x>0,\ s^{-1}=3^{-x}>0$ であるから，相加相乗平均の関係から

$$t=s+s^{-1} \geqq 2\sqrt{ss^{-1}}=2$$

が成り立ち，等号は $s=s^{-1}$ から $s=1$ すなわち $x=0$ のときに成り立つ．従って t のとり得る値の範囲は $t \geqq 2$ であることに注意しておく．

$$h'(t)=3t^2-2t-6$$

となり，$h'(t)=0$ の解について $t=\dfrac{1\pm\sqrt{19}}{3}<2$ なので，$t \geqq 2$ のとき $h'(t)>0$ が成り立つ．従ってこの範囲で $h(t)$ は単調増加であるから，$h(t)$ すなわち $g(x)$ は，

$t=2$ すなわち　$\boldsymbol{x=0}$　のときに最小値 $\boldsymbol{0}$ をとる．

別解

$h(t)$ の増減を調べる代わりに以下のように考えてもよい．

$h(t)=(t-2)(t^2+t-4)$ となるので，$h(t)=0$ の解は $t=2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$ となる．この 3 解のうち最大のものは $t=2$ であるから，t 切片に注意しながら $h(t)$ のグラフを描くと，$h(t)$ は $t \geqq 2$ で単調増加であると分かる．

(2)　$G,\ L$ は正なので，真数条件は成り立っている．与えられた条件式を整理すると，

$$\begin{aligned} 2\log_3 L-\log_3 G=3+5\log_3 2 &\iff \frac{L^2}{G}=2^5\cdot 3^3 \\ \log_2 L+\log_2 G=7+3\log_2 3 &\iff LG=2^7\cdot 3^3 \end{aligned}$$

となる．これらを辺々掛けることにより，

$$L^3=2^{12}\cdot 3^6 \iff L=2^4\cdot 3^2$$

となるので，

$$G=\frac{2^7\cdot 3^3}{L}=2^3\cdot 3$$

も分かる．$p,\ q$ を互いに素な自然数として $m=pG,\ n=qG$ とおくと $L=pqG$ が成り立つことから，

$$2^4\cdot 3^2=pq\cdot 2^3\cdot 3 \iff pq=6$$

が分かる．$G < m < n$ より $1 < p < q$ なので，$p = 2,\ q = 3$．従って，

$$\boldsymbol{m = 48,\ n = 72}$$

となる．

(3)　点 $(5x + 6y,\ x + 4y)$ を P とする．ℓ 上の点を $(t,\ at + b)$ とおくと，P の座標は

$$(5t + 6(at + b),\ t + 4(at + b)) = ((6a + 5)t + 6b,\ (4a + 1)t + 4b)$$

となる．P が ℓ 上にあることから，

$$\begin{aligned} & (4a + 1)t + 4b = a\{(6a + 5)t + 6b\} + b \\ \iff\quad & (6a^2 + a - 1)t + 6ab - 3b = 0 \end{aligned}$$

これが t の恒等式となればよいので，

$$6a^2 - a - 1 = 0 \quad \text{かつ} \quad 6ab - 3b = 0$$

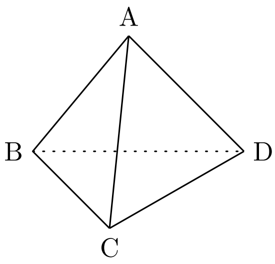
となる．

$$6a^2 - a - 1 = 0 \iff (2a + 1)(3a - 1) = 0 \iff a = -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$$
$$6ab - 3b = 0 \iff 3b(2a - 1) = 0 \iff a = \frac{1}{2}\ \text{または}\ b = 0$$

となるので，

$$\boldsymbol{(a,\ b) = \left(-\frac{1}{2},\ 0\right),\ \left(\frac{1}{3},\ 0\right)}$$

$\boxed{\textbf{2}}$ 右の図のような正四面体 ABCD を考える．△BCD, △ACD, △ABD, △ABC の重心をそれぞれ E,F,G,H とすると，正四面体 EFGH ができる．



(1) 正四面体 EFGH の体積は正四面体 ABCD の体積の何倍か求めよ．

(2) 辺 AB,AC,AD,CD,DB,BC の中点をそれぞれ I,J,K,L,M,N とすると，正八面体 IJKLMN ができる．正八面体 IJKLMN の体積は正四面体 ABCD の体積の何倍か求めよ．

(3) (2) で定めた正八面体 IJKLMN の 8 つの面 △IJK, △IKM, △IMN, △INJ, △LJK, △LKM, △LMN, △LNJ の重心をそれぞれ P,Q,R,S,T,U,V,W とすると，立方体 PQRS-TUVW ができる．立方体 PQRS-TUVW の体積は正四面体 ABCD の体積の何倍か求めよ．

(4) (3) で定めた 4 点 P,Q,R,S を通る平面によって正四面体 ABCD を切り分けたとき，頂点 A,B を含む側の体積は正四面体 ABCD の体積の何倍か求めよ．

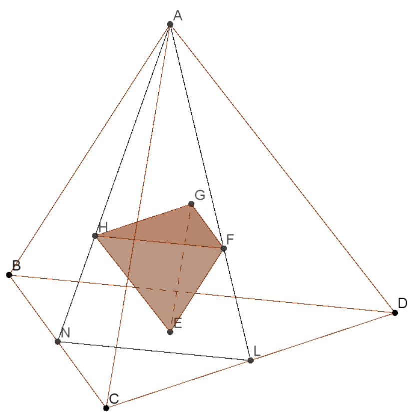
解答

(1) $\dfrac{1}{27}$ 倍　　(2) $\dfrac{1}{2}$ 倍　　(3) $\dfrac{1}{9}$ 倍　　(4) $\dfrac{7}{27}$ 倍

解説

(1) △ANL において AH : HN = 2 : 1 なので，$\mathrm{HF} = \dfrac{2}{3}\mathrm{NL} = \dfrac{1}{3}\mathrm{BD}$

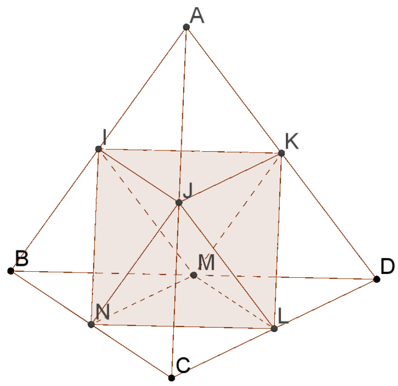
よって，$\dfrac{V_{\mathrm{EFGH}}}{V_{\mathrm{ABCD}}} = \left(\dfrac{\mathrm{HF}}{\mathrm{BD}}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$



(2) $\mathrm{AI} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$ より $\dfrac{V_{\mathrm{AIJK}}}{V_{\mathrm{ABCD}}} = \left(\dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AB}}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$

よって $V_{\mathrm{IJKLMN}} = V_{\mathrm{ABCD}} - 4 \cdot V_{\mathrm{AIJK}} = V_{\mathrm{ABCD}} - 4 \cdot \dfrac{1}{8}V_{\mathrm{ABCD}} = \dfrac{1}{2}V_{\mathrm{ABCD}}$

すなわち，$\dfrac{V_{\mathrm{IJKLMN}}}{V_{\mathrm{ABCD}}} = \dfrac{1}{2}$



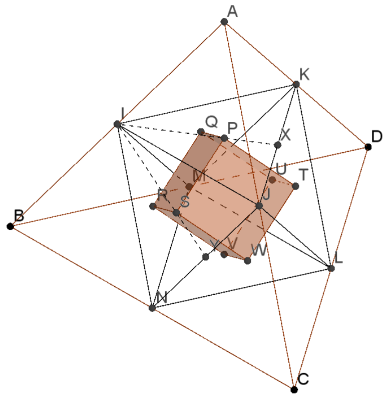
(3)　立方体 PQRS-TUVW の 1 辺の長さを a とする．IP と JK の交点を X，IS と JN の交点を Y とすると，$\mathrm{XY} = \frac{3}{2}\mathrm{PS} = \frac{3}{2}a$

よって正四角錐 IJKMN の底面の対角線の長さは $\mathrm{KN} = 2\mathrm{XY} = 3a$．高さは $\frac{3}{2}a$．

正八面体 IJKLMN の体積は正四角錐 IJKMN の 2 倍で，

$V_{\mathrm{IJKLMN}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3a)^2}{2}\cdot\frac{3}{2}a\times 2 = \frac{9}{2}a^3$．すなわち，$\frac{V_{\mathrm{PQRS-TUVW}}}{V_{\mathrm{IJKLMN}}} = \frac{2}{9}$

したがって，(2) の結果も用いると，$\frac{1}{2}\times\frac{2}{9} = \frac{1}{9}$



(4)　四面体 ABCD の 1 辺の長さを a とする．四面体 $\mathrm{AA_1J_1K_1}$ と四面体 $\mathrm{BB_1N_1M_1}$ を貼り合わせると，1 辺の長さが $\frac{1}{3}a$ の正四面体となるので，その体積は $\frac{1}{27}V_{\mathrm{ABCD}}$．

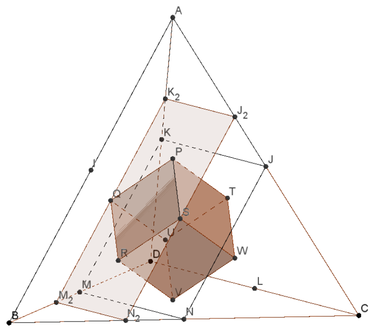
また，$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{A_1J_1K_1}\cdot 2\mathrm{AA_1} = V_{\mathrm{AA_1J_1K_1}}$，

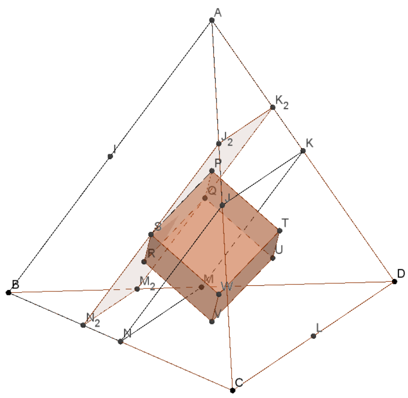
$\mathrm{AA_1} = \frac{1}{6}a$ より，

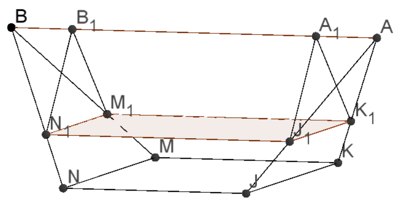
$\triangle\mathrm{A_1J_1K_1} = \frac{9}{a}V_{\mathrm{AA_1J_1K_1}} = \frac{9}{a}\cdot\frac{1}{27}V_{\mathrm{ABCD}} = \frac{1}{3a}V_{\mathrm{ABCD}}$

したがって，

$\frac{1}{27}V_{\mathrm{ABCD}} + \frac{1}{3a}V_{\mathrm{ABCD}}\times\frac{2}{3}a = \frac{7}{27}V_{\mathrm{ABCD}}$







$\boxed{\text{別解}}$

中学受験生がよくやる「断頭三角柱」の考え方（「体積 = 断面積 × 平均の高さ」）を使うと以下のようになる．

まず $\mathrm{AJ_1}:\mathrm{J_1J} = \mathrm{BN_1}:\mathrm{N_1N} = 2:1$ から $\mathrm{AB} = 2$ とすると $\mathrm{JN} = 1$, $\mathrm{J_1N_1} = \frac{4}{3}$ とわかる．

ここで，三角柱 $\mathrm{AJ_1K_1}$-$\mathrm{BN_1M_1}$ と三角柱 AJK-BNM の断面積の比は $2^2:3^2 = 4:9$ なので，その

体積比は

$$4 \times \frac{2 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{3} : 9 \times \frac{2 + 1 + 1}{3} = 14 : 27$$

である．三角柱 AJK-BNM の体積は四面体 ABCD の半分だから三角柱 $\mathrm{AJ_1K_1}$-$\mathrm{BN_1M_1}$ と四面体 ABCD の体積比は 7 : 27 と分かる．

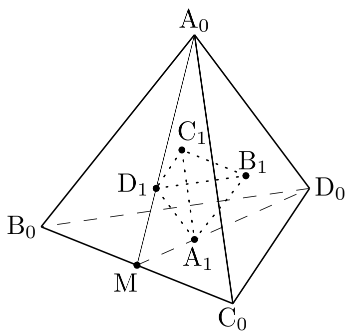
的中!!

メビオ 2巡目テキスト

1 辺の長さ 1 の正四面体の 4 つの頂点を $\mathrm{A_0}$，$\mathrm{B_0}$，$\mathrm{C_0}$，$\mathrm{D_0}$ とする．この正四面体の各面 $\triangle \mathrm{A_0B_0C_0}$, $\triangle \mathrm{A_0B_0D_0}$, $\triangle \mathrm{A_0C_0D_0}$, $\triangle \mathrm{B_0C_0D_0}$ の重心をそれぞれ $\mathrm{D_1}$，$\mathrm{C_1}$，$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{A_1}$ とする．正四面体 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ についても，同じように各面の重心をとり，それを $\mathrm{D_2}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{A_2}$ として，正四面体 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ をつくる．以下同じように正四面体 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ $(n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ をつくり，その体積を V_n とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) V_0 を求めよ．

(2) V_1 を求めよ．



$\boxed{\mathbf{3}}$ 3つの実数 $a,\ b,\ c$ が $ab=6\cdots$①, $a+b-c^2=1\cdots$②, $c(a-b)=2\cdots$③ を満たすとする。

(1) $a,\ b$ の符号を求めよ。

(2) ①, ②, ③から $a,\ b$ を消去し $c^2=x$ とおけば，x はある3次方程式 $f(x)=0$ を満たす。x^3 の係数が1であるような3次式 $f(x)$ を求めよ。

(3) (2) で求めた3次方程式 $f(x)=0$ の正の実数解の個数を求めよ。

(4) ①, ②, ③を満たす実数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

解答

(1) $ab=6>0$ より $a,\ b$ は同符号である．また $a+b=c^2+1>0$ であるから，

$$\boldsymbol{a>0,\ b>0}$$

(2) ③より $c^2(a-b)^2=4\cdots$③$'$ である．また，

$$\begin{aligned}(a-b)^2&=(a+b)^2-4ab\\&=(c^2+1)^2-24\quad(\because ①,②)\\&=c^4+2c^2-23\end{aligned}$$

となるので，③$'$ から

$$\begin{aligned}&c^2(c^4+2c^2-23)=4\\\Longleftrightarrow\ &c^6+2c^4-23c^2-4=0\\\Longleftrightarrow\ &x^3+2x^2-23x-4=0\end{aligned}$$

従って，

$$\boldsymbol{f(x)=x^3+2x^2-23x-4}$$

(3) $f(x)=(x-4)(x^2+6x+1)$ より，$f(x)=0$ の解は $x=4,\ -3\pm2\sqrt{2}$ なので，

正の実数解は **1 個**.

(4) c は実数なので，$c^2\geqq0$ であることを考慮すると $c^2=4$ である．
このとき，①, ② より

$$ab=6,\ a+b=5$$

であるので，これを解いて

$$(a,\ b)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$$

従って③より，

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ -2),\ (3,\ 2,\ 2)}$$

講評

$\boxed{1}$ ［小問集合］

(1)[3 次関数]（標準）指数関数と3次関数の融合問題．$t=3^x+3^{-x}$ と置き換えた後の関数が $t\geqq2$ において単調増加であることに気づくことが出来るか，がポイント.

(2)[整数問題]（標準）最大公約数と最小公倍数の意味が分かっていればなんとかなるだろう．

(3)[図形と式]（標準）不動直線を決定する問題．恒等式に持ち込むことができれば大丈夫．

$\boxed{2}$［空間図形］（難）正多面体に関する問題．(1)(2) はしっかり得点しておきたい．(3)(4) は難しい．ここを突破できたら大分リードできるだろう．

$\boxed{3}$［方程式］（標準）誘導に素直に従っていけばよい．(3) で因数分解に気づくことができるか，がポイントとなる．

昨年より更に難化した．易しい問題が殆どないため，時間がかかりそうな問題は後回しするなど，うまく立ち回らなければならない．$\boxed{2}$に深入りせず，$\boxed{1}$，$\boxed{3}$で得点を伸ばしていきたい．目標は 50%.