近畿大学医学部 2017年度（後期）入学試験 解答速報 数学

2017年3月8日 実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\triangle$ABC は， $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$, $\mathrm{BC}=2$ の二等辺三角形である．$\triangle$ABC の外接円の半径を R，内接円の半径を r とする．

(1) x のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $\cos A+\cos B+\cos C$ の最大値とそのときの x の値を求めよ．

(3) $\dfrac{r}{R}$ の最大値とそのときの x の値を求めよ．

解答

(1) $x>1$ (2) $x=2$ のとき最大値 $\dfrac{3}{2}$ (3) $x=2$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$

解説

(1) 三角形の存在条件より $2<x+x$ かつ $x<2+x$ であるから，これより $\boldsymbol{x>1}$

(2) 余弦定理により $\cos A=\dfrac{2x^2-4}{2x^2}=\dfrac{x^2-2}{x^2}$ であり，また，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を考えることにより $\cos B=\cos C=\dfrac{1}{x}$ であるから，

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C &= \frac{x^2-2}{x^2}+\frac{2}{x}\\ &= -2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)+1\\ &= -2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

したがって， $0<\dfrac{1}{x}<1$ に注意して $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2} \iff \boldsymbol{x=2}$ のとき 最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ をとる．

(3) BC を底辺とみると，この三角形の高さは $\sqrt{x^2-1}$ であるから，面積についての等式

$$\frac{1}{2}r(x+x+2)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2-1}$$

が成り立つので，これより $r=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\cdots$① が得られる．一方，正弦定理より $\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin A}=2R \iff \sin A=\dfrac{1}{R}$ であるから，三角形の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot\sin A &= \frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot\frac{1}{R}\\ &= \frac{x^2}{2R}\end{aligned}$$

となり，したがって再び面積についての等式

$$\frac{x^2}{2R}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2-1}$$

より $\dfrac{1}{R} = \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x^2} \cdots$② も得られる．①，②より

$$\begin{aligned}\frac{r}{R} &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\cdot\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x^2}\\ &= \frac{2(x^2-1)}{x^2(x+1)} = \frac{2(x-1)}{x^2}\\ &= -2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\\ &= -2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるので，$0 < \dfrac{1}{x} < 1$ に注意して $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \iff \boldsymbol{x=2}$ のとき最大値 $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ をとる．

$\boxed{\text{補足}}$：実は一般の三角形において，

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = \frac{r}{R} \cdots (*)$$

が成立するので，(2)(3) の最大値を与える x の値が一致するのは当然である．

$\boxed{(*)\text{ の証明}}$：

$\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{CA} = b$，$\mathrm{AB} = c$ とし，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とすると，ヘロンの公式より三角形の面積 S は $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ で与えられる．したがって，余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C - 1 &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1\\ &= \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2abc}\\ &= \frac{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{2abc}\\ &= \frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{2sabc}\\ &= \frac{4S^2}{sabc}\\ &= \frac{S}{s}\cdot\frac{4S}{abc}\\ &= \frac{r}{R}\end{aligned}$$

最後は $S = \dfrac{1}{2}r(a+b+c) = rs$ および $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}ab\dfrac{c}{2R} = \dfrac{abc}{4R}$ を用いた．　（証明終）

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

- $a_1 = 0$.
- $n \geqq 2$ のとき，a_n は x の 3 次方程式 $x^3 - 3x^2 - {a_{n-1}}^2 + a_{n-1} + 4 = 0$ の異なる実数解の個数とする．

(1) a_2 を求めよ．

(2) a_3 を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000} a_k$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000} ka_k$ を求めよ．

(5) 積 $a_2 \times a_3 \times a_4 \times \cdots \times a_{1000}$ の桁数を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

解答

(1) 2　(2) 3　(3) 1998　(4) 1000665　(5) 260 桁

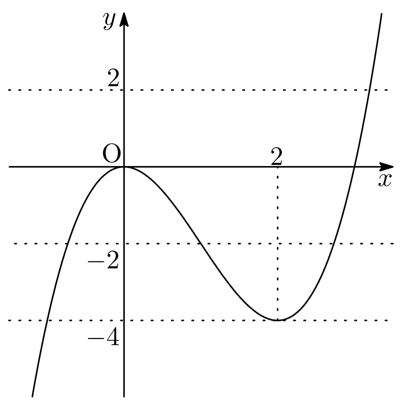
解説

$x^3-3x^2-{a_{n-1}}^2+a_{n-1}+4=0 \Longleftrightarrow x^3-3x^2={a_{n-1}}^2-a_{n-1}-4$

より，この方程式の解の個数は，$y = x^3 - 3x^2$ のグラフと $y = {a_{n-1}}^2 - a_{n-1} - 4$ のグラフの共有点の個数を数えればよい．

$f(x) = x^3 - 3x^2$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ より増減表とグラフは次の通りである．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$



(1) $a_1 = 0$ より，${a_1}^2 - a_1 - 4 = -4$．$y = f(x)$ と $y = -4$ の共有点の個数は 2 個なので $a_2 = \mathbf{2}$.

(2) ${a_2}^2 - a_2 - 4 = -2$．$y = f(x)$ と $y = -2$ の共有点の個数は 3 個なので $a_3 = \mathbf{3}$.

(3) ${a_3}^2 - a_3 - 4 = 2$．$y = f(x)$ と $y = 2$ の共有点の個数は 1 個なので $a_4 = \mathbf{1}$.

${a_4}^2 - a_4 - 4 = -4$．$y = f(x)$ と $y = -4$ の共有点の個数は 2 個なので $a_5 = \mathbf{2}$.

以下同様の繰り返しなので，この数列 $\{a_n\}$ は次のようになっている．

$$0,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ \cdots\cdots$$

したがって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{1000} a_k = 0 + (2 + 3 + 1) \times 333 = \mathbf{1998}$.

(4) (3) と同様に，初項以外を 3 項ずつまとめる．

$$\sum_{k=1}^{1000} ka_k = a_1 + (2a_2 + 3a_3 + 4a_4) + (5a_5 + 6a_6 + 7a_7) + \cdots + (998a_{998} + 999a_{999} + 1000a_{1000})$$

$$= \sum_{l=1}^{333} \{(3l-1)\cdot 2 + 3l \cdot 3 + (3l+1)\cdot 1\} = \sum_{l=1}^{333} (18l - 1) = 18 \cdot \frac{1}{2} \cdot 333 \cdot 334 - 333 = \mathbf{1000665}.$$

(5) $a_2 \times a_3 \times a_4 \times \cdots \times a_{1000} = (2 \cdot 3 \cdot 1)^{333} = 6^{333}$ である．$\log_{10} 6^{333} = 333(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 259.1073$ より，$10^{259} < 6^{333} < 10^{260}$ なので，**260 桁**.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a,\ b$ を実数とし，$a>0$ とする．曲線 $y=x^3+3ax^2+3a^2x$ を C とし，点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ とする．

(1) 点 A を通り，曲線 C に接する直線の本数を求めよ．

(2) $b<0$ とする．(1) の直線がちょうど 2 本であるとき，接線をそれぞれ $l_1,\ l_2$ とする．l_1 と l_2 の方程式を求めよ．ただし，l_1 の傾きは l_2 の傾きより小さいとする．

(3) 曲線 C とその接線 $l_1,\ l_2$ とで囲まれる部分のうち，面積が小さいほうの面積を求めよ．

解答

(1) 曲線 C 上の接点を $(t,\ t^3+3at^2+3a^2t)$ とおく．
$y'=3x^2+6ax+3a^2$ より，接線は $y=(3t^2+6at+3a^2)x-2t^3-3at^2$．これに $\mathrm{A}(a,\ b)$ を代入し，t について整理すると，

$$2t^3-6a^2t-3a^3+b=0$$

この t に関する方程式の解の個数が，接線の本数となるので，以下 $f(t)=-2t^3+6a^2t+3a^3$ と $y=b$ の共有点の個数で考える．

$f'(t)=-6(t+a)(t-a)\ \ (a>0)$ より $y=f(t)$ の増減は以下の通りである．

t	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	$-a^3$	$\nearrow$	$7a^3$	$\searrow$

極小値 $f(-a)=-a^3$，極大値 $f(a)=7a^3$ をもつことがわかので，$y=f(t)$ と $y=b$ の共有点の個数，つまり接線の本数は

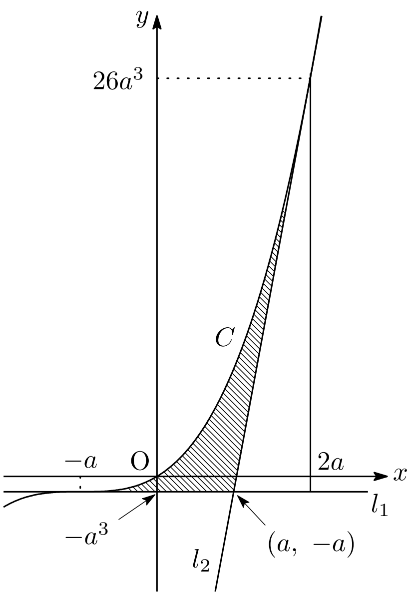
$$\begin{cases} \boldsymbol{b<-a^3,\ b>7a^3} \textbf{ のとき 1 本}. \\ \boldsymbol{b=-a^3,\ b=7a^3} \textbf{ のとき 2 本}. \\ \boldsymbol{-a^3<b<7a^3} \textbf{ のとき 3 本}. \end{cases}$$

となる．

(2) (1) において，接線が 2 本引け，$a>0,\ b<0$ を満たすのは $b=-a^3$ のときである．

このとき $f(t)=b$ は $2t^3-6a^2t-4a^3=(t+a)^2(t-2a)=0$ となり接点の x 座標は $t=-a,\ 2a$ と求められる．

接線は $t=-a$ のとき $y=-a^3$ であり，$t=2a$ のときは $y=27a^2x-28a^3$ となる．
傾きを考慮して, 答は $\boldsymbol{l_1:\ y=-a^3,\ \ l_2:\ y=27a^2x-28a^3}$.



(3) 曲線 C の導関数 $y'=3(x+a)^2\geqq 0$ であることを考慮するとグラフは右図のようになる．

l_1 と l_2 は $x=a$ で交点を持つ．面積を求めると

$$\int_{-a}^{2a}(x+a)^3\,dx-\frac{1}{2}\cdot a\cdot 27a^3$$
$$=\left[\frac{1}{4}(x+a)^4\right]_{-a}^{2a}-\frac{27}{2}a^4=\boldsymbol{\frac{27}{4}a^4}$$

講評

$\boxed{1}$［三角形］（やや易）三角形の成立条件等三角形の範囲の基本事項を問う問題．どの問題も基本的であり，満点で乗り切りたい．

$\boxed{2}$［数列（融合問題）］（標準）$n \geqq 2$ のとき $\{a_n\}$ が周期 3 で繰り返すことが見抜ければ，その後は単純．計算ミスが命取りとなるだろう．

$\boxed{3}$［数 II 微積分］（標準）典型的な問題．(3) の面積計算は計算の上手い下手が得点を左右するだろう．

昨年度まで「全問マーク形式」の出題であったが，今年から「大問 3 題のうち 2 題は答のみ，1 題は記述」の形式に変わった（推薦，一般前期と同じ形式）．単純に昨年の問題と比較する訳にはいかないが，昨年に比べて明らかに易化した．今年の一般前期に比べても易しい．

記述の大問があるとはいえ，高得点勝負となるだろう．ボーダーは 9 割．