近畿大学医学部 2017年度（前期）入学試験 解答速報 数学

2017年1月22日 実施

1

(1) サイコロの各面に A，B の 2 色を 3 面ずつ塗る塗り方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りある。また，A，B，C の 3 色を 2 面ずつ塗る塗り方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある。

(2) 正六面体の各面に色を塗る。ただし回転して同じになるものは同じ塗り方とする。2 色を使う塗り方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある。3 色を使う塗り方は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある。

(3) 底面が正方形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ で，辺の長さがすべて 1 である四角錐 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ $(n=1,\cdots,6)$ がある。これら 6 個の四角錐の底面を，辺の長さが 1 の正六面体のすべての面の外側にはりあわせるとき，$\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3\mathrm{O}_4\mathrm{O}_5\mathrm{O}_6$ を頂点とする正八面体を P とする。P の表面積は $\boxed{\text{オ}}$ であり，体積は $\boxed{\text{カ}}$ である。

解答

(1) ア. 20　イ. 90

(2) ウ. 8　エ. 30

(3) オ. $3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$　カ. $\dfrac{7+5\sqrt{2}}{6}$

解説

(1) さいころの各面には 1〜6 の番号が振られているので互いに区別できる．A，B の 2 色を 3 面ずつ塗る塗り方は ${}_6\mathrm{C}_3=20$ 通り．また，A，B，C の 3 色を 2 面ずつ塗る塗り方は ${}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2=90$ 通り．

(2) まず正六面体の上面下面を P, Q, 側面を X, Y, Z, W と呼ぶことにする．

2 色を使う塗り方 (仮に 2 色を青と赤とする)

(i) （1 面+5 面）P を青色か赤色にするだけで良いので 2 通り．

(ii) （2 面+4 面）青色を 2 面に塗る場合は P+Q か P+X の 2 通りが考えられる．よって $2\times2=4$ 通り．

(iii) （3 面+3 面）P+X+Y と P+X+Q の 2 通り．

以上により合計は $2+4+2=8$ 通り．

3 色を使う塗り方 (仮に 3 色を青・赤・黄とする)

(i) （1 面+1 面+4 面）4 面塗るのが青色の場合，赤，黄の配置は P+Q か P+X の 2 通り．よって $2\times3=6$ 通り．

(ii) （1 面+2 面+3 面）1 面が青，2 面が赤，3 面が黄の場合を考える．

この場合 P が青色だとして良い．そのとき赤色の塗り方は Q+X か X+Y か X+Z の 3 通り．よって $3\times3!=18$ 通り．

(iii)　(2 面+2 面+2 面) 青色の塗り方は P+Q と P+X.

青が P+Q の場合，赤は X+Y か X+Z の 2 通り.

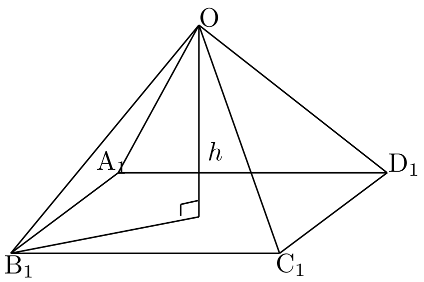
青が P+X の場合，赤は Y+W, Q+Z, Z+Y(=Q+W), Q+Y(=Z+W) の 4 通り．よって $2+4=6$ 通り.

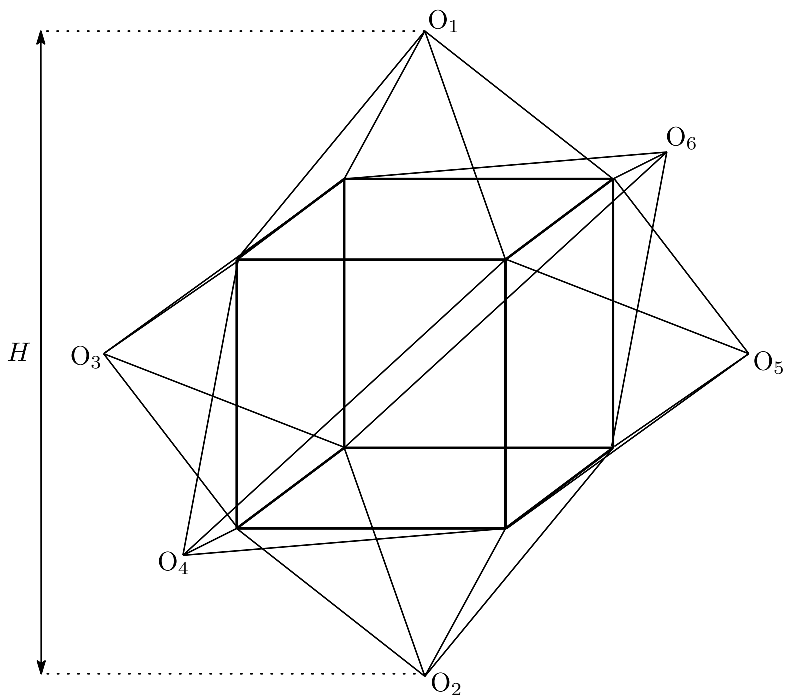
以上により合計は $6+18+6=30$ 通り.

(3) まず問題により与えられている，辺の長さがすべて 1 である四角錐の高さを h とすると，$h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である．正八面体 P の向かい合う 2 頂点間の距離を H とすると，$H=1+2h=1+\sqrt{2}$．よって P の 1 辺の長さ ($=a$ とする) は $a=\dfrac{H}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$．求める表面積と体積を S, V とすると，

$$S=8\times\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ=\sqrt{3}(1+\sqrt{2})^2=3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$$

$$V=2\times\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{H}{2}=\frac{(1+\sqrt{2})^3}{6}=\frac{7+5\sqrt{2}}{6}.$$





立体を Web で見る

2 $a>0$ とする。関数 $f(x)=x^3-3a^2x+2a^3$ について考える。

(1) $f(x)$ の極小値 m_1 を求め，極大値 m_2 を a で表せ。また，そのときの x の値を求めよ。

(2) 区間 $-3 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を $M(a)$ とする。$M(a)=m_2$ となる a の値の範囲を求めよ。

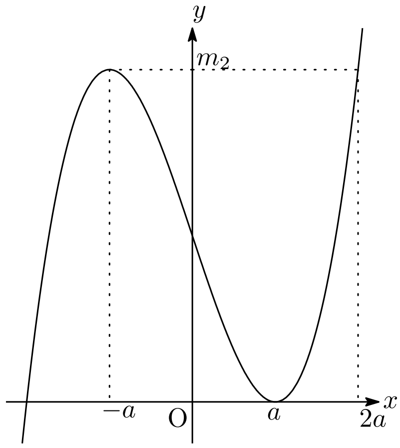
(3) $M(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

解答

(1) 極小値 $m_1=0$，極大値 $m_2=4a^3$，x の値は $x=-a$

(2) $\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq 3$

(3) $M(a)$ の最小値は $\dfrac{27}{2}$ で，そのときの a の値は $\dfrac{3}{2}$



解説

$f(x)=x^3-3a^2x+2a^3$ $(a>0)$

(1) $f'(x)=3(x+a)(x-a)$ より，

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4a^3$	$\searrow$	0	$\nearrow$

増減表より $m_1=f(a)=0$，$m_2=f(-a)=4a^3$

(2) $m_2=f(-a)=f(2a)=4a^3$ より $a \leqq 3 \leqq 2a$ つまり $\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq 3$ のとき.

(3) (i) $3<a$ のとき

$M(a)=f(-3)=2a^3+9a^2-27$

このとき $M'(a)=6a(a+3)$

(ii) $a \leqq 3 \leqq 2a$ つまり $\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq 3$ のとき

$M(a)=4a^3$．これは単調に増加する.

(iii) $3>2a$ つまり $0<a<\dfrac{3}{2}$ のとき

$M(a)=f(3)=2a^3-9a^2+27$

このとき $M'(a)=6a(a-3)$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$M'(a)$		$-$		$+$	$+$	$+$
$M(a)$		$\searrow$	$\frac{27}{2}$	$\nearrow$	108	$\nearrow$

増減表より，最小値は $M\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 円に内接する四角形ABCDにおいて，$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=2$，$\mathrm{CD}+\mathrm{DA}=9$とする。$\mathrm{CD}=x$とおく。

(1) $\mathrm{AC}=\sqrt{14}$のとき，三角形ABCの面積を求めよ。

(2) xのとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 四角形ABCDの面積の最大値を求めよ。

解答

以下，$\angle\mathrm{ABC}=\theta$とおく．$\angle\mathrm{ADC}=\pi-\theta$である．

(1) 三角形ABCにおいて余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &=5^2+2^2-2\cdot5\cdot2\cdot\cos\theta\\ &=29-20\cos\theta\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

三角形ADCにおいて余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &=x^2+(9-x)^2-2\cdot x\cdot(9-x)\cdot\cos(\pi-\theta)\\ &=2x^2-18x+81+2(-x^2+9x)\cos\theta\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}&29-20\cos\theta=2x^2-18x+81+2(-x^2+9x)\cos\theta\\ \iff\ &-x^2+9x-26-(-x^2+9x+10)\cos\theta=0\\ \iff\ &(-x^2+9x+10)(1-\cos\theta)-36=0\\ \iff\ &-x^2+9x+10=\frac{36}{1-\cos\theta}\ \cdots\cdots②\end{aligned}$$

ここで，$-x^2+9x+10=-\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{121}{4}$より$\frac{36}{1-\cos\theta}\leqq\frac{121}{4}$なので$\cos\theta\leqq-\frac{23}{121}$．これと①より$\mathrm{AC}^2\geqq29+\frac{460}{121}$であるべきだが，$\mathrm{AC}=\sqrt{14}$はこれを満たさないので，**題意を満たす図形は存在しない**．

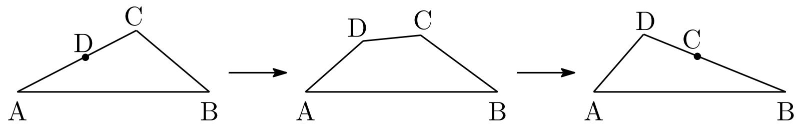
(2) $\cos\theta>-1$より$\frac{36}{1-\cos\theta}>18$．よって②より，

$$-x^2+9x+10>18\iff(x-1)(x-8)<0\iff\boldsymbol{1<x<8}$$

注釈

正の4数a, b, c, d $(a\leqq b\leqq c\leqq d)$を4辺に持つ四角形が存在するための必要十分条件は$d<a+b+c$である（証明は容易）．もしくは大小関係のわからない正の4数a, b, c, dを4辺に持つ四角形が存在するための必要十分条件は$a+b+c>d$かつ$a+b+d>c$かつ$a+c+d>b$かつ$b+c+d>a$といってもよい．

そしてこれが満たされるとき，それらの辺を持つ四角形の角だけを調整することにより円に内接させることが可能である．それは四角形ABCDを次の図のように変形させればわかる．



AC が最長になるように四角形を引っ張った場合，$B=\pi$ または $D=\pi$ が成り立ち $B+D>\pi$ である．また BD が最長になるように四角形を引っ張った場合，$A=\pi$ または $C=\pi$ が成り立ち $A+C>\pi$ である．変形は連続に行えるのだから，その間に $A+C=B+D=\pi$ となる図形が現れる．

従って本問の場合も円に内接する条件は忘れて四角形の存在条件だけを考えればよい．その条件は $2+5+x>9-x$ かつ $2+5+(9-x)>x$ であり，解いて $\boldsymbol{1<x<8}$ を得る，

(3) ②より，

$$1-\cos\theta=\frac{36}{-x^2+9x+10}$$
$$\iff \quad \cos\theta=\frac{-x^2+9x-26}{-x^2+9x+10}$$

よって，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{-x^2+9x-26}{-x^2+9x+10}\right)^2}$$
$$=\frac{6\sqrt{-2x^2+18x-16}}{-x^2+9x+10}$$

となる．ゆえに，

$$\begin{aligned}(\text{四角形 ABCD})=&(\text{三角形 ABC})+(\text{三角形 ADC})\\=&\frac{1}{2}\cdot5\cdot2\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot x\cdot(9-x)\sin(\pi-\theta)\\=&\frac{1}{2}(-x^2+9x+10)\sin\theta\\=&3\sqrt{-2x^2+18x-16}\\=&3\sqrt{-\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}\end{aligned}$$

となることから，$\boldsymbol{x=\frac{9}{2}}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\frac{21\sqrt{2}}{2}}$ である．

注釈

円に内接する四角形 ABCD の辺の長さを $\mathrm{AB}=a$, $\mathrm{BC}=b$, $\mathrm{CD}=c$, $\mathrm{DA}=d$ とし，$s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ とすると，四角形 ABCD の面積 S は

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

で得られる．これは**ブラーマグプタ (Brahmagupta) の公式**と呼ばれる．

この公式を用いれば，$s=\dfrac{5+2+x+(9-x)}{2}=8$ より，

$$S=\sqrt{(8-5)(8-2)(8-x)(8-9+x)}=3\sqrt{2(8-x)(x-1)}$$

と簡単に求められる.

公式の証明

$\angle\mathrm{ABC}=\theta$ とおくと，三角形 ABC と三角形 ADC の余弦定理より，

$$\mathrm{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta,\quad \mathrm{AC}^2=c^2+d^2+2cd\cos\theta$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$ となるので，

$$\begin{aligned}
\sin\theta=&\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left\{\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right\}^2}\\
=&\frac{\sqrt{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{2(ab+cd)}\\
=&\frac{\sqrt{(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)}}{2(ab+cd)}\\
=&\frac{\sqrt{\{(c+d)^2-(a-b)^2\}\{(a+b)^2-(c-d)^2\}}}{2(ab+cd)}\\
=&\frac{\sqrt{(c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{2(ab+cd)}\\
=&\frac{\sqrt{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)}}{2(ab+cd)}\\
=&\frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ab+cd}
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
S=&\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ADC}\\
=&\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}cd\sin\theta\\
=&\frac{1}{2}(ab+cd)\frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ab+cd}\\
=&\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\quad\text{（証明終）}
\end{aligned}$$

講評

$\boxed{1}$　(1)(2) は場合の数の問題．(2) では正確に数え上げるのにかなりの慎重さを要する．(3) は正 8 面体についての求積．立体を正確に把握するのが難しい．

$\boxed{2}$　文字定数を含む 3 次関数についての最大最小問題．典型題であり，ここは満点が欲しい．

$\boxed{3}$　円に内接する四角形についての問題．(1) では，題意の図形は存在しない（出題ミスであろう）．(2) では $\cos\theta$ の範囲に注目すればよい．(3) は厳密に考えるのは手間がかかるが，根拠が曖昧でも $\mathrm{AD}=\mathrm{CD}$ のときだと見当をつけて面積を求められたかどうかで差がつきそう．

　ここ数年と比較すると難化した．特に，大問 1 は多くの生徒が (2)(3) を落としていると思われる．大問 2 を完答し，大問 3 でどれだけ立ち回れたかの勝負となりそう．5 割前後がボーダーで，6 割とれればリードできる，というところか．