近畿大学医学部 2016年度（後期）入学試験 解答速報 数学

2016年3月8日 実施

I (1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{10\cdot 11}=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である。

また，$\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\dfrac{1}{10\cdot 13}=\dfrac{\boxed{オカキ}}{\boxed{クケコサ}}$ である。

(2) 4 個の数字 2, 0, 1, 6 を全部使って 4 桁の数字を作るとき，81 で割り切れるものは全部で $\boxed{シ}$ 個ある。その中で一番大きな数を X とすると，$X=\boxed{スセソタ}$ であり，X の約数は全部で $\boxed{チツ}$ 個ある。

(3) i を虚数単位とし，$z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とする。このとき，

$$z^3=\boxed{テト},\qquad z^2+z+1=\boxed{ナ}+\sqrt{\boxed{ニ}}i$$

である。また，

$$z^4+z^3+z^2=\boxed{ヌネ}$$

である。

解答

	解答記号	正解
(1)	$\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$	$\dfrac{10}{11}$
	$\dfrac{\boxed{オカキ}}{\boxed{クケコサ}}$	$\dfrac{905}{1716}$
(2)	$\boxed{シ}$	2
	$\boxed{スセソタ}$	2106
	$\boxed{チツ}$	20
(3)	$\boxed{テト}$	-1
	$\boxed{ナ}+\sqrt{\boxed{ニ}}i$	$1+\sqrt{3}i$
	$\boxed{ヌネ}$	-2

注釈

(2) 「約数」の個数は，「**正の**約数」の個数と解釈した．負の約数も含めると 40 個ある．

$\boxed{\text{解説}}$

(1) 数列 $\dfrac{1}{1\cdot 2},\ \dfrac{1}{2\cdot 3},\ \dfrac{1}{3\cdot 4},\cdots$ の一般項を a_n とすると $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

よって和は $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=1-\dfrac{1}{11}=\dfrac{10}{11}$.

同様にして, 数列 $\dfrac{1}{1\cdot 4},\ \dfrac{1}{2\cdot 5},\ \dfrac{1}{3\cdot 6},\cdots$ の一般項を b_n とすると $b_n=\dfrac{1}{n(n+3)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+3}\right)$.

$$\sum_{k=1}^{10}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{13}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)=\frac{905}{1716}.$$

(2) 出来る 4 桁の数を N とし, 1000, 100, 10, 1 の位の数をそれぞれ, $a,\ b,\ c,\ d\ (a\neqq 0)$ とする．$a,\ b,\ c,\ d$ は 2, 0, 1, 6 の並べ換えであり，$N=1000a+100b+10c+d$ である．$a+b+c+d=9$ が成り立つので $d=9-a-b-c$ を代入することにより

$$\begin{aligned}
&N\equiv 0\pmod{81}\\
\iff\ &1000a+100b+10c+d\equiv 0\pmod{81}\\
\iff\ &999a+99b+9c+9\equiv 0\pmod{81}\\
\iff\ &111a+11b+c+1\equiv 0\pmod{9}\\
\iff\ &3a+2b+c\equiv 8\pmod{9}\cdots①
\end{aligned}$$

がわかる．さらに必要条件として

$$3a+2b+c\equiv 8\pmod{9}\Longrightarrow 2b+c\equiv 2\pmod{3}\iff b\equiv c+1\pmod{3}$$

が得られるが，この解は $(b,\ c)=(1,\ 0),\ (1,\ 6),\ (2,\ 1),\ (0,\ 2),\ (6,\ 2)$ の 5 通りある．これを ① に代入してうまく a が定まるのは $(b,\ c)=(1,\ 0),\ (6,\ 2)$ のみで，それぞれ $N=2106,\ 1620$ に対応する.

大きい方の数は $X=2106=2\times 3^4\times 13$ であり,（正の）約数は $2\times 5\times 2=20$ 個存在する（負の約数も考えると 40 個である）.

(3) $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ より $(2z-1)^2=(\sqrt{3}i)^2\iff z^2-z+1=0\iff z^2=z-1$ なので $z^3=z^2-z=-1$.

（もちろん極形式で表せば $z=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ なので $z^3=-1$ は即答できる.）

$z^2+z+1=(z-1)+z+1=2z=1+\sqrt{3}i$.

また $z^4+z^3+z^2=(-z)+(-1)+(z-1)=-2$.

II　k は定数とする。関数 $f(x) = x^2 - 5|x| - x + k$ について考える。

(1) $k = -1$ のとき，$f(-3) = \boxed{アイ}$ である。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解が 2 個であるとき，k のとりうる値の範囲は $k < \boxed{ウ}$ または $\boxed{エ} < k < \boxed{オ}$ である。

(3) $k = 2$ とする。区間 $-3 \leqq x \leqq 4$ において，関数 $y = f(x)$ は $x = \boxed{カ}$ で最大値 $\boxed{キ}$ をとり，$x = \boxed{ク}$ で最小値 $\boxed{ケコ}$ をとる。

(4) $k = 2$ とし，a は定数とする。区間 $a \leqq x \leqq a + 10$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が -7 であるとき，a のとりうる値の範囲は

$$\boxed{サシ} \leqq a \leqq \boxed{ス}$$

である。

(5) $k = 5$ とし，a は定数とする。区間 $a \leqq x \leqq a + 10$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が 1 であるための必要十分条件は

$$\boxed{セソタ} \leqq a \leqq \boxed{チツ} - \sqrt{\boxed{テ}} \text{ または } a = \boxed{ト} + \sqrt{\boxed{ナ}}$$

である。

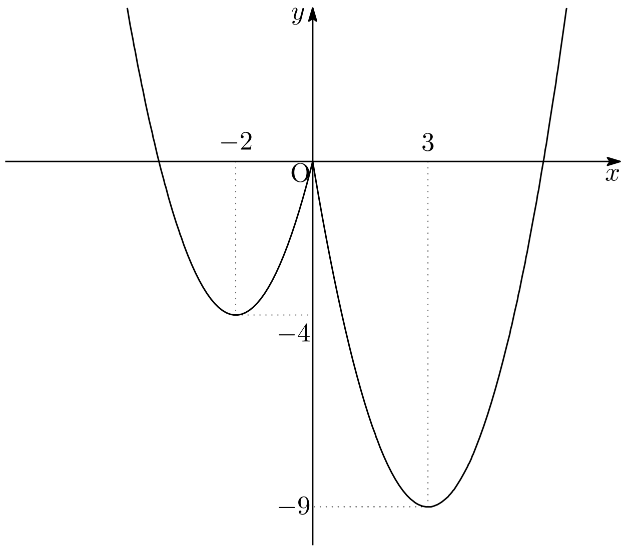
解答

	解答記号	正解
(1)	$\boxed{アイ}$	-4
(2)	$k < \boxed{ウ}$	$k < 0$
	$\boxed{エ} < k < \boxed{オ}$	$4 < k < 9$
(3)	$\boxed{カ}$, $\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$, $\boxed{ケコ}$	$0,\ 2,\ 3,\ -7$
(4)	$\boxed{サシ} \leqq a \leqq \boxed{ス}$	$-7 \leqq a \leqq 3$
(5)	$\boxed{セソタ} \leqq a \leqq \boxed{チツ} - \sqrt{\boxed{テ}}$	$-12 \leqq a \leqq -7 - \sqrt{5}$
	$a = \boxed{ト} + \sqrt{\boxed{ナ}}$	$a = 3 + \sqrt{5}$

$\boxed{\text{解説}}$

(1) $k=-1$ のとき， $f(-3)=(-3)^2-5|-3|-(-3)-1=9-15+3-1=-4.$

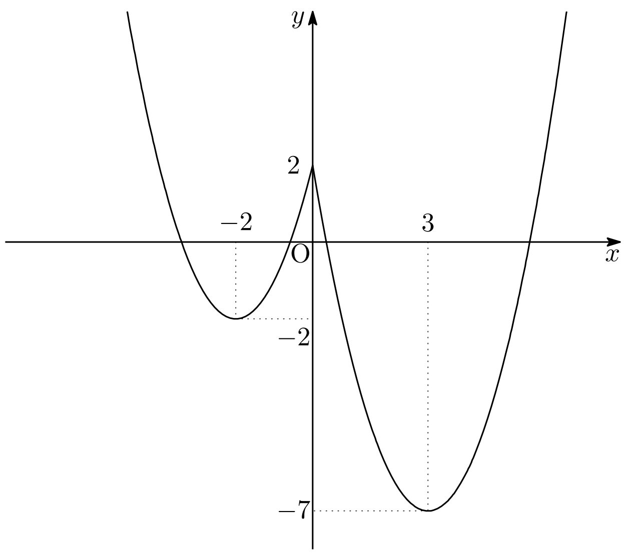
(2) $f(x)=0 \iff x^2-5|x|-x=-k$ であるから，$y=x^2-5|x|-x=\begin{cases} x^2-6x\ (x \geqq 0) \\ x^2+4x\ (x<0) \end{cases}$ のグラフと $y=-k$ のグラフの共有点の個数が 2 個となればよい．$y=x^2-5|x|-x$ のグラフは以下の通り．



したがって， $y=-k$ との共有点の個数が 2 個となるのは
$-9<-k<-4,\ -k>0 \iff k<0,\ 4<k<9$ のときである．

(3) $k=2$ のとき，$f(x)=\begin{cases} x^2-6x+2=(x-3)^2-7\ (x \geqq 0) \\ x^2+4x+2=(x+2)^2-2\ (x<0) \end{cases}$ である．

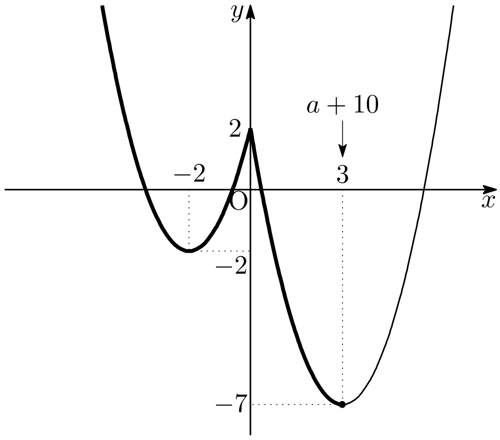
したがって， $y=f(x)$ のグラフは次の通り．



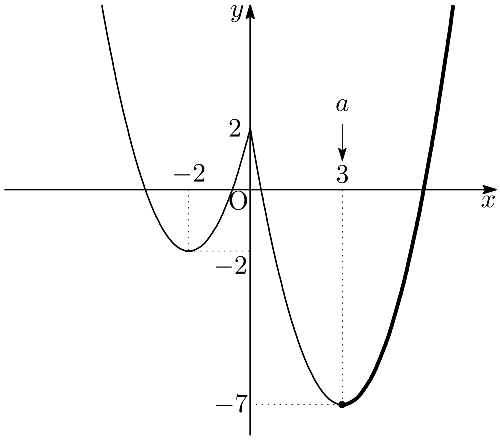
したがって，区間 $-3 \leqq x \leqq 4$ において関数 $y=f(x)$ は $x=0$ のとき最大値 2 をとり， $x=3$ のとき最小値 -7 をとる．

(4) グラフより題意を満たす a の範囲は $-7 \leqq a \leqq 3$.

参考：

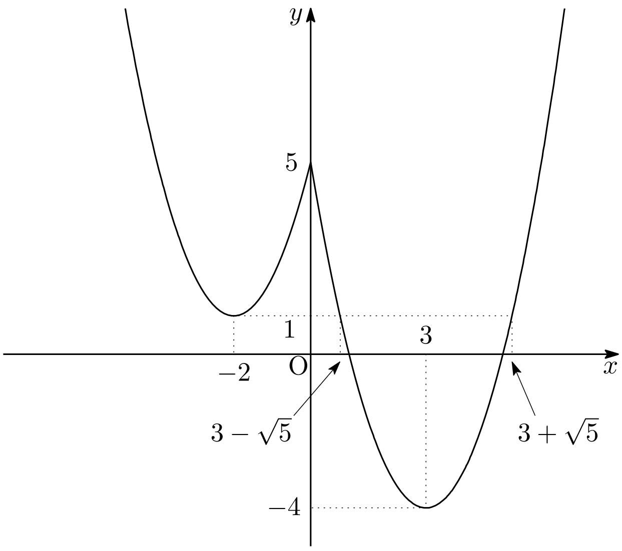


a が最小のとき



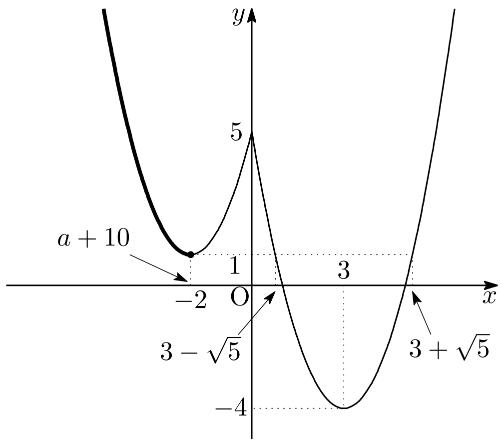
a が最大のとき

(5) $k=5$ のとき，$f(x)=\begin{cases} x^2-6x+5=(x-3)^2-4 \ (x \geqq 0) \\ x^2+4x+5=(x+2)^2+1 \ (x<0) \end{cases}$ であり， $y=f(x)$ のグラフは次の通りである.

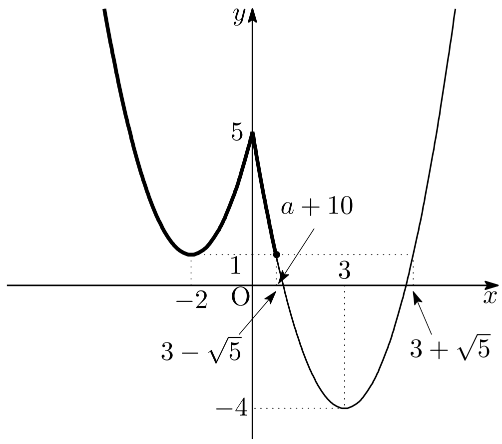


したがって，求める a の条件は $-12 \leqq a \leqq -7-\sqrt{5}$ または $3+\sqrt{5}$.

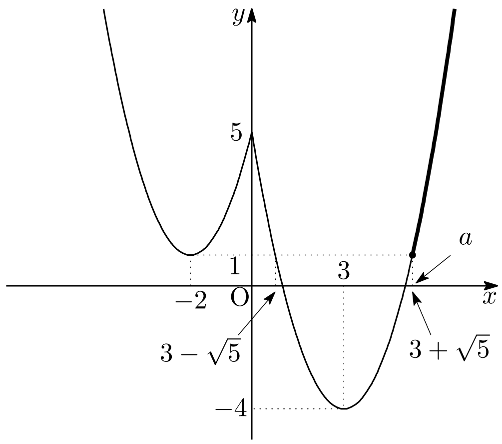
参考：



$a=-12$ のとき



$a=-7-\sqrt{5}$ のとき



$a=3+\sqrt{5}$ のとき

III　長方形 ABCD と正三角形 APQ がある。ただし，$\mathrm{AB} = a$，$\mathrm{BC} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ であり，頂点 P, Q は長方形 ABCD の周上または内部の点とする。

(1) P が辺 AB 上の点であり，かつ Q が長方形 ABCD の周上の点であるとき，$\mathrm{AP} = \sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ である。

(2) P が辺 BC 上の B と異なる点であるとき, Q から直線 AB に下ろした垂線の長さは $\dfrac{\mathrm{BP} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}\,a}{\boxed{\text{ウ}}}$

であり，Q から直線 BC に下ろした垂線の長さは $\dfrac{a + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}\,\mathrm{BP}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(3) P が辺 BC 上の B と異なる点であり，かつ Q が辺 CD 上の D と異なる点であるとき，$\mathrm{BP} = \sqrt{\boxed{\text{カ}}} - \sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,a$ であり，a のとりうる値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}} < a < \sqrt{\boxed{\text{サ}}}$

である。

(4) P が長方形 ABCD の周上の点であり，かつ Q が辺 DA 上の点であるとき，$\mathrm{BP} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}a$ で

あり，a の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(5) 正三角形 APQ の面積を S とする。

$a = \sqrt{6}$ のとき，S の最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

また $a = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき，S の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}} - \boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

解答

	解答記号	正解
(1)	$\sqrt{\boxed{ア}}$	$\sqrt{2}$
(2)	$\dfrac{\mathrm{BP}+\sqrt{\boxed{イ}}\,a}{\boxed{ウ}}$	$\dfrac{\mathrm{BP}+\sqrt{3}\,a}{2}$
	$\dfrac{a+\sqrt{\boxed{エ}}\,\mathrm{BP}}{\boxed{オ}}$	$\dfrac{a+\sqrt{3}\,\mathrm{BP}}{2}$
(3)	$\sqrt{\boxed{カ}}-\sqrt{\boxed{キ}}\,a$	$\sqrt{6}-\sqrt{3}\,a$
	$\dfrac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}<a<\sqrt{\boxed{サ}}$	$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}<a<\sqrt{2}$
(4)	$\dfrac{\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}\,a$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,a$
	$\dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$	$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$
(5)	$\dfrac{\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
	$\dfrac{\boxed{テ}\sqrt{\boxed{ト}}-\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$	$\dfrac{6\sqrt{3}-9}{2}$

$\boxed{\text{解説}}$

(1) $\mathrm{AP} = \sqrt{2}$ である（[図 1] 参照）.

(2) 正三角形の 1 辺の長さを l，$\angle\mathrm{PAB} = \theta$ とする．また，Q から AB，BC に下ろした垂線の足をそれぞれ $\mathrm{H_1}$，$\mathrm{H_2}$ とする（[図 2] 参照）.

$\mathrm{QH_1} = \mathrm{AQ} \times \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ であり，

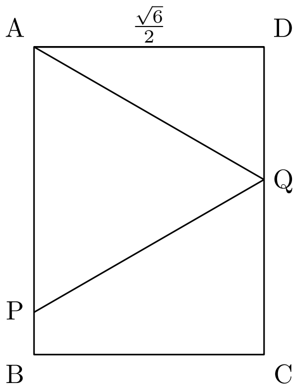
$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\theta\cos\dfrac{\pi}{3} + \cos\theta\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，

$\mathrm{QH_1} = l \times \left(\dfrac{\mathrm{BP}}{2l} + \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2l}\right) = \dfrac{\mathrm{BP} + \sqrt{3}\,a}{2}$.

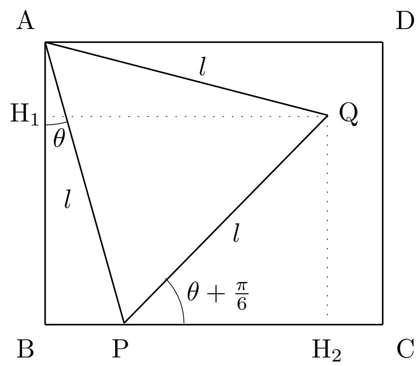
$\mathrm{QH_2} = \mathrm{QP} \times \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$ であり，

$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}}\dfrac{1}{2}$ であるから，

$\mathrm{QH_2} = l \times \left(\dfrac{\sqrt{3}\,\mathrm{BP}}{2l} + \dfrac{a}{2l}\right) = \dfrac{a + \sqrt{3}\,\mathrm{BP}}{2}$.



[図 1]



[図 2]

(3) $\mathrm{QH_1} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ となればよい．$\dfrac{\mathrm{BP} + \sqrt{3}\,a}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ を解いて $\mathrm{BP} = \sqrt{6} - \sqrt{3}\,a$.

また，このような図が実際に存在するためには $0 < \mathrm{BP} < \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ かつ $\mathrm{QH_2} < a$ が成り立たなければならない.

$$0 < \sqrt{6} - \sqrt{3}a < \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ かつ } \frac{a + \sqrt{3}\left(\sqrt{6} - \sqrt{3}a\right)}{2} < a$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < a < \sqrt{2} \text{ かつ } a > \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

したがって $\dfrac{3\sqrt{2}}{4} < a < \sqrt{2}$.

(4) $\mathrm{BP} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,a$ である（[図 4] 参照）．また $\mathrm{AQ} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ だから $a \leqq \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

(5) (i) $a=\sqrt{6}$ のとき

$\triangle$APQ は 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正三角形となるとき S が最大となる（[図 5(i)] 参照）.

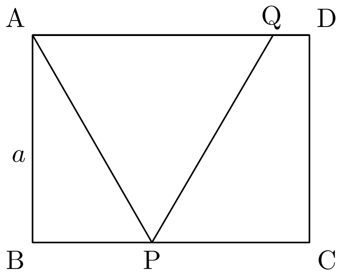
したがって $S=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(ii) $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき

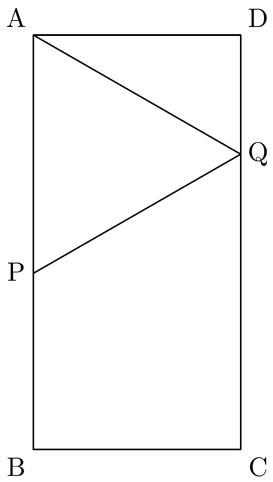
[図 5(ii)] のとき S が最大となる．このときの正三角形 APQ の 1 辺の長さは

$$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=3-\sqrt{3}.$$

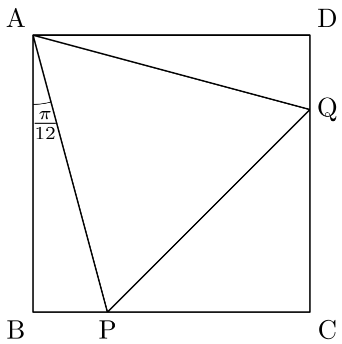
したがって $S=\dfrac{1}{2}\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)^2\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{6\sqrt{3}-9}{2}$.



[図 4]



[図 5(i)]



[図 5(ii)]

講評

Ⅰ（小問集合） (1) は易しいが計算が煩雑．(2) はすべて調べ上げてもよいが，かなり面倒な作業になる．(3) は易しいので確実に正解したい．

Ⅱ（2 次関数のグラフ） 比較的易しい．ここは完答したい．

Ⅲ（図形問題） (2) で方針を立てるのが難しかったかも知れない．なお，(4),(5) は (2) が出来ていなくても解ける．

　ここ数年は易化傾向だったが，今年は難化した．ボーダーは 8 割 5 分前後か．

医歯学部進学予備校 メビオ

〒540-0033 大阪市中央区石町2-3-12 ベルヴォア天満橋

TEL 06-6946-0109 FAX 06-6941-9416

http://www.mebio.co.jp/

MeBio Scholastics