近畿大学医学部 2016年度(前期)入学試験 解答速報 数学

2016年1月24日 実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ 正 n 面体の各面に 1 から n の数字を 1 つずつ書き，n 面のさいころ（n 面ダイス）をつくる。ただし回転させて一致するものは同じ n 面のダイスとみなす。

(1) n は 5 つの値をとる。それらの和は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) 数字の書き方は $n=4$ のとき $\boxed{\text{イ}}$ 通り，$n=6$ のとき $\boxed{\text{ウ}}$ 通り，$n=8$ のとき $\boxed{\text{エ}}$ 通り存在する。

(3) n 面ダイスのそれぞれの目の出る確率は $\dfrac{1}{n}$ とする。

(i) 4 面ダイスと 8 面ダイスを投げて，出た目の積が 4 の倍数となる確率は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(ii) 4 面ダイスと 6 面ダイスと 8 面ダイスを投げて，出た目の積が 100 以上となる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) ア．50

(2) イ．2　ウ．30　エ．1680

(3) (i) オ．$\dfrac{1}{2}$

(ii) カ．$\dfrac{5}{64}$

$\boxed{\text{解説}}$

(1) $n=4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 20$ である (有名事実)．したがってそれらの和は 50 である．

(2) 回転による重複を避けるため，ある面の数字を固定する．

- $n=4$ のとき
  1 つの面を 1 に固定し，これを底面とする．それ以外の 3 面の数字の書き方は，残り 3 つの数字の円順列なので $(3-1)!=2$ 通りであり，これが答である．
- $n=6$ のとき
  1 つの面を 1 に固定し，これを上面とする．底面の数字の書き方は 5 通りで，側面の数字の書き方は残り 4 つの数字の円順列となるので，求める場合の数は $5\cdot(4-1)!=30$ 通り．
- $n=8$ のとき
  1 つの面を 1 に固定し，これを上面とする．底面の数字の書き方は 7 通りである．側面の数字の書き方は，まず残り 6 つの数字から 3 つを選び，上面と辺を共有する 3 面にそれらを書く．

この書き方は 3 つの数字の円順列となる．残り 3 面への残った 3 つの数字の書き方は $3!$ であるから，求める場合の数は $7 \cdot {}_6\mathrm{C}_3 \cdot (3-1)! \cdot 3! = 1680$ 通り．

(3) (ⅰ) 余事象を考えると，

- 出た目がともに奇数のとき．これは $2 \cdot 4 = 8$ 通り．
- 出た目の一方が奇数で，もう一方が 4 の倍数でない偶数のとき．これは $2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 8$ 通り．

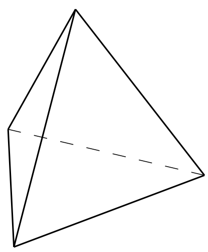
以上から，求める確率は $1 - \dfrac{8+8}{4 \cdot 8} = \dfrac{1}{2}$．

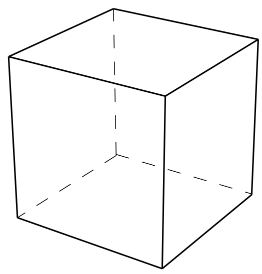
(ⅱ) 題意を満たす 4, 6, 8 面ダイスの目の組を地道に数え上げると，

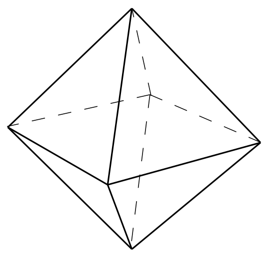
$$\begin{gathered}(3{,}5{,}7),\ (3{,}5{,}8),\ (3{,}6{,}6),\ (3{,}6{,}7),\ (3{,}6{,}8),\ (4{,}4{,}7),\ (4{,}4{,}8),\ (4{,}5{,}5),\\ (4{,}5{,}6),\ (4{,}5{,}7),\ (4{,}5{,}8),\ (4{,}6{,}5),\ (4{,}6{,}6),\ (4{,}6{,}7),\ (4{,}6{,}8)\end{gathered}$$

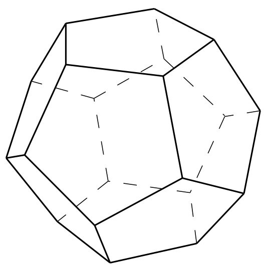
の 15 通りなので，求める確率は $\dfrac{15}{4 \cdot 6 \cdot 8} = \dfrac{5}{64}$．

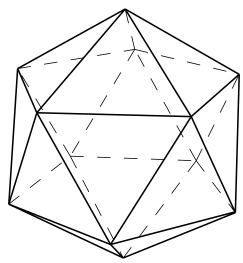
【参考】すべての面が合同な正多角形で，各頂点に集まる面の数が等しく，隣り合うどの 2 面のなす角も等しい多面体を正多面体といい，次の 5 種類に限られる．


正四面体


正六面体
(立方体)


正八面体


正十二面体


正二十面体

2

(1) 方程式 $x^3-3x^2-9x-k=0$ が異なる 3 個の実数解を持つように，定数 k の値の範囲を定めよ。

(2) 辺の長さが $\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{BC}=6$，$\mathrm{AC}=5$ の三角形 ABC がある。$\cos A$ の値を定めよ。$\angle\mathrm{A}$ の 2 等分線と辺 BC との交点を D とすると，三角形 ABD の外接円の直径を求めよ。

(3) 三角形 ABC がある。辺 AC の中点を P，線分 BP を $t:1-t$ に内分する点を Q，直線 CQ と辺 AB の交点を R とする。$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CR}}$ を t の式で表せ。また三角形 BQR と三角形 CQP の面積が等しくなるように t の値を定めよ。

解答

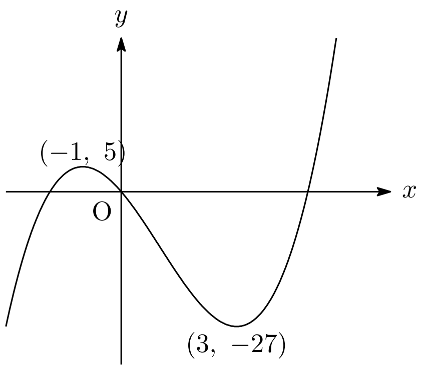
(1) $-27<k<5$

(2) $\cos A=\dfrac{1}{8}$　　外接円の直径は $\dfrac{32\sqrt{7}}{21}$

(3) $\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CR}}=1-\dfrac{t}{2}$　　$t=\dfrac{2}{3}$

解説

(1)



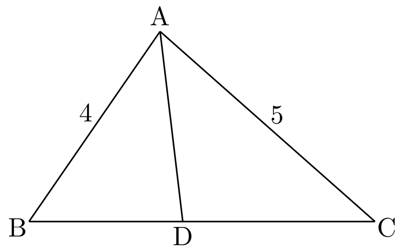
与式を $k = x^3 - 3x^2 - 9x$ と変形し，$y = k$ と
$y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ の交点の個数で考える。
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$ なので増減表は次のようになる。

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

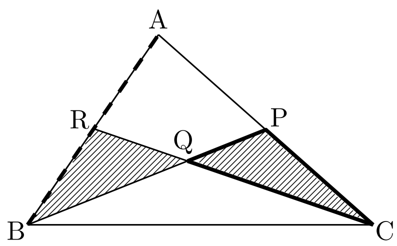
これより解を 3 つ持つのは $-27 < k < 5$ のときである.

(2)

余弦定理より $\cos A = \dfrac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}$
$= \dfrac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2\cdot4\cdot5} = \dfrac{1}{8}$.
D は BC を AB : AC に内分するので
$\mathrm{BD} = 6 \times \dfrac{4}{4+5} = \dfrac{8}{3}$.
また $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}} = \dfrac{3}{4}$ なので,
$\sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. 外接円の半径を R とおくと直径は
$2R = \dfrac{\mathrm{BD}}{\sin\dfrac{A}{2}} = \dfrac{32\sqrt{7}}{21}$.



(3)



三角形 CPQ と直線 ARB に関するメネラウスの定理より,

$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AP}} \times \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BQ}} \times \frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RC}} = \frac{2}{1} \times \frac{1}{t} \times \frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RC}} = 1$$

従って $\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RC}} = \dfrac{t}{2}$ となり $\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CR}} = 1 - \dfrac{t}{2}$ である.
またこの場合 $\triangle\mathrm{BQR} : \triangle\mathrm{CQP} = \mathrm{QR}\times\mathrm{QB} : \mathrm{QC}\times\mathrm{QP}$
$= t^2 : (2-t)(1-t)$ であるから
$t^2 = (2-t)(1-t)$ を解いて $t = \dfrac{2}{3}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 放物線 $y=4x^2+x$ を C とし，a を正の実数とする。

(1) C 上の点 $(1, 5)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 点 $(0, -a)$ から C へ引いた 2 つの接線を ℓ_1，ℓ_2 とする。ただし ℓ_1 の傾きは ℓ_2 の傾きより大きいとする。また，ℓ_1，ℓ_2 と C との接点をそれぞれ A_1，A_2 とする。ℓ_1，ℓ_2 の方程式と A_1，A_2 の座標を求めよ。

(3) 2 点 A_1，A_2 を通る直線および C で囲まれた図形の面積 S_1 を求めよ。

(4) ℓ_1，ℓ_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$\dfrac{S_1}{S_2}$ を求めよ。

解答

$C: y=f(x)$ とおく．

(1) $y=9x-4$

(2) 接点を $(t,\ 4t^2+t)$ とすると，接線は $y=(8t+1)x-4t^2$．この方程式に $(0,\ -a)$ を代入し，t について解くと $a>0$ より $t=\pm\dfrac{\sqrt{a}}{2}$ が得られる．傾きの大小を考慮して

$\ell_1: y=(1+4\sqrt{a})x-a,\ \ell_2: y=(1-4\sqrt{a})x-a,$

また $\mathrm{A}_1\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2},\ a+\dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)$，$\mathrm{A}_2\left(-\dfrac{\sqrt{a}}{2},\ a-\dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)$.

(3) 2 点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ を通る直線を $y=\ell(x)$ とおくと，C との交点が $x=\pm\dfrac{\sqrt{a}}{2}$ であることより，

$$S_1=\int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}}(\ell(x)-f(x))\,dx=\int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}}\left\{-4\left(x-\frac{\sqrt{a}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{a}}{2}\right)\right\}dx=\frac{2}{3}a\sqrt{a}$$

(4) $\ell_1,\ \ell_2$ を $y=\ell_1(x),\ y=\ell_2(x)$ とおく．$\ell_1,\ \ell_2$ は C と接するので，

$$S_2=\int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{0}(f(x)-\ell_2(x))\,dx+\int_{0}^{\frac{\sqrt{a}}{2}}(f(x)-\ell_1(x))\,dx=\int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{0}4\left(x+\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2dx+\int_{0}^{\frac{\sqrt{a}}{2}}4\left(x-\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2dx$$

(このように整理するとこの後の計算が楽になる)．計算して $S_2=\dfrac{1}{3}a\sqrt{a}$．よって $\dfrac{S_1}{S_2}=2$.

注釈

$S_1 : S_2 = 2:1$ という結果は受験生にとっては有名事実のはず．それを敢えて導出せよということ．

講評

$\boxed{1}$　場合の数と確率の問題．正 n 面体についての知識が必要だが，それくらいは身につけておきたい．(2) が難しいが，それ以外は易しい．

$\boxed{2}$　小問集合．どれも易しいので完答したい．(3) のような幾何の問題は 3 年連続で出題されている．

$\boxed{3}$　数 II の微積分．2 次関数についての接線，面積の典型題で，易しい．これも完答したい．

ここ数年は易化傾向だったが，今年は更に易しくなった．$\boxed{1}$ (2) 以外は完答が欲しいところ．ボーダーは 9 割前後か．