近畿大学医学部 2015年度（後期）入学試験 解答速報 数学

2015年3月8日 実施

I

(1) 座標平面上の放物線 $G_1 : y = -x^2 + 2x + 3$ を考える。点 $(2,\ 3)$ における G_1 の接線を ℓ とすると，ℓ の方程式は $y = \boxed{アイ}\,x + \boxed{ウ}$ である。また，G_1 を x 軸方向に -4，y 軸方向に 12 だけ平行移動して得られる放物線を G_2 とするとき，G_2 と ℓ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$ である。

(2) 方程式

$$2|t| + 2|t-2| = 3t + 10$$

の解は，値の小さい順に $t = \dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$，$\boxed{コサ}$ である。

(3) △ABC の辺 AB を 1 : 3 に内分する点を D とし，辺 CA を 1 : 3 に外分する点を E とする。このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \frac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である。また，辺 BC と線分 DE の交点を F とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツテ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナニ}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

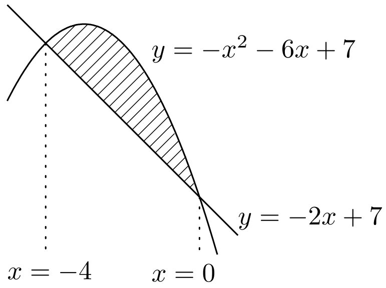
である。

解答

	解答記号	正解
(1)	$\boxed{アイ}\,x + \boxed{ウ}$	$-2x + 7$
	$\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$	$\dfrac{32}{3}$
(2)	$\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$，$\boxed{コサ}$	$\dfrac{-6}{7}$，14
(3)	$\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$	$\dfrac{-1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
	$\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツテ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナニ}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$	$\dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{9}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

解説

(1) $f(x)=-x^2+2x+3$ とおくと $f'(x)=-2x+2$.
点 $(2,\ 3)$ における接線 ℓ は $y=f'(2)(x-2)+3=-2x+7$.
放物線 G_2 は $y=f(x+4)+12=-x^2-6x+7$.
これと直線 ℓ を連立すると,
$-x^2-6x+7=-2x+7 \Leftrightarrow x(x+4)=0 \Leftrightarrow x=-4,\ 0$
したがって求める面積は,
$\displaystyle\int_{-4}^{0}\{(-x^2-6x+7)-(-2x+7)\}\,dx=\frac{1}{6}(0+4)^3=\frac{32}{3}$.



(2) (i) $t<0$ のとき

$$(\text{与方程式}) \Leftrightarrow 2(-t)+2(-t+2)=3t+10 \Leftrightarrow t=-\frac{6}{7} \quad (t<0 \text{ を満たす.})$$

(ii) $0 \leqq t < 2$ のとき

$$(\text{与方程式}) \Leftrightarrow 2t+2(-t+2)=3t+10 \Leftrightarrow t=-2$$

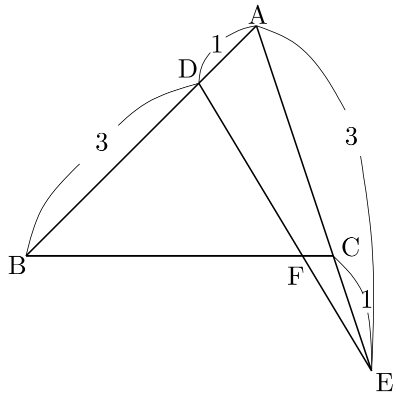
これは $0 \leqq t < 2$ を満たさないので不適である．よって $0 \leqq t < 2$ の場合，解は存在しない.

(iii) $2 \leqq t$ のとき

$$(\text{与方程式}) \Leftrightarrow 2t+2(t-2)=3t+10 \Leftrightarrow t=14 \quad (2 \leqq t \text{ を満たす.})$$

以上より，$t=-\dfrac{6}{7},\ 14$.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
よって $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
メネラウスの定理より（おもりの公式を利用してもよい),
$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\dfrac{1}{3}=1$
$\Leftrightarrow \mathrm{BF}:\mathrm{FC}=9:1$
したがって $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{9}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.



II　3 辺の長さが a，b，c の三角形 T を考える。T の面積を S とし，外接円の半径を R，内接円の半径を r とする。さらに，T の 3 つの内角を A，B，C とする。そこで，三角形 T に対して 3 つの値 $D(T)$，$E(T)$，$F(T)$ を

$$D(T)=\frac{a^2+b^2+c^2}{S},\quad E(T)=\frac{R}{r},\quad F(T)=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

と定める。

(1) T_1 を正三角形とする。このとき，

$$D(T_1)=\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}},\quad E(T_1)=\boxed{ウ},\quad F(T_1)=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$$

である。

(2) T_2 を直角二等辺三角形とするとき，$D(T_2)=\boxed{カ}$ であり，

$$E(T_2)=\sqrt{\boxed{キ}}+\boxed{ク},\quad F(T_2)=\frac{\sqrt{\boxed{ケ}}-\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$$

である。

(3) T_3 を 3 辺の長さの比が $3:3:\sqrt{6}$ の三角形とする。このとき，

$$D(T_3)=\frac{\boxed{シス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}},\quad E(T_3)\cdot F(T_3)=\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$$

である。

解答

	解答記号	正解
(1)	$\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$	$4\sqrt{3}$
	$\boxed{ウ}$	2
	$\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$	$\frac{1}{8}$
(2)	$\boxed{カ}$	8
	$\sqrt{\boxed{キ}}+\boxed{ク}$	$\sqrt{2}+1$
	$\frac{\sqrt{\boxed{ケ}}-\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$	$\frac{\sqrt{2}-1}{4}$
(3)	$\frac{\boxed{シス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}$	$\frac{16\sqrt{5}}{5}$
	$\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$	$\frac{1}{4}$

解説

$D(T),\ E(T),\ F(T)$ はすべて3辺の長さの比で決まるので，以下では $a,\ b,\ c$ の値を適当に定めることとする．また内角 $A,\ B,\ C$ の対辺の長さをそれぞれ $a,\ b,\ c$ とする．

(1) $a=b=c=1$ とする．$S=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ なので $D(T_1)=\dfrac{1^2+1^2+1^2}{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}=4\sqrt{3}.$

また正三角形では重心，内心，外心は一致するので，その点を G とすると，$R=|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|,\ r=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|$ であるから $E(T_1)=2$．また $F(T_1)=\sin^3\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{8}.$

(2) $a=b=1,\ c=\sqrt{2}$ とする．$S=\dfrac{1}{2}$ なので，$D(T_2)=\dfrac{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2}{\dfrac{1}{2}}=8.$

また $\dfrac{1}{2}r(1+1+\sqrt{2})=S$ より $r=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}.$

また $C=\dfrac{\pi}{2}$ より c が外接円の直径となるので $R=\dfrac{c}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

したがって $E(T_2)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2+\sqrt{2})=\sqrt{2}+1.$

また $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ とすると $F(T_2)=\sin^2\dfrac{\theta}{2}\sin\theta=\dfrac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta=\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}.$

(なお，$a=b$ である二等辺三角形の場合，$A=B=\theta$ とすると

$F(t)=\sin^2\dfrac{\theta}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1-\cos\theta}{2}\cos\theta\cdots$① となる)

(3) $a=b=3,\ c=\sqrt{6}$ とする．また $A=B=\theta$ とする．(右図参照)

AB の中点を M とすると，AB $\perp$ CM なので三平方の定理を用いて $\mathrm{CM}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{AM}^2}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$ と分かる．

したがって $S=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{30}}{2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ より，

$D(T_3)=\dfrac{3^2+3^2+(\sqrt{6})^2}{\dfrac{3\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{16\sqrt{5}}{5}.$

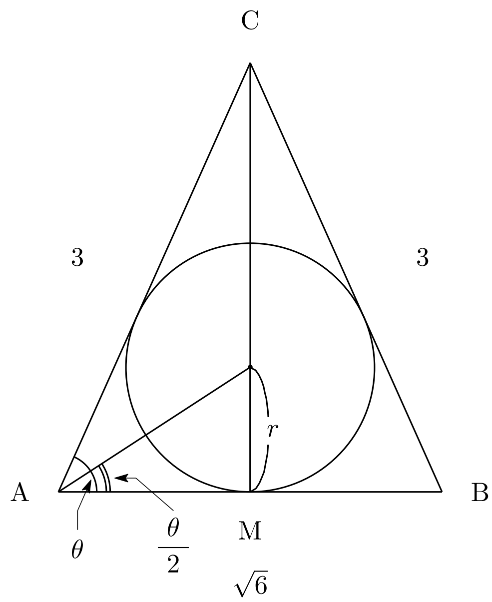
また正弦定理から $2R=\dfrac{3}{\sin\theta}$ なので $R=\dfrac{3}{2\sin\theta}=\dfrac{3\sqrt{30}}{10},$

また $\dfrac{1}{2}r(3+3+\sqrt{6})=S$ より $r=\dfrac{\sqrt{5}(6-\sqrt{6})}{10}.$

また $\cos\theta=\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ なので，①から

$F(T_3)=\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{6}}{6}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\sqrt{6}-1}{12}.$

したがって，$E(T_3)\cdot F(T_3)=\dfrac{\dfrac{3\sqrt{30}}{10}}{\dfrac{\sqrt{5}(6-\sqrt{6})}{10}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}-1}{12}=\dfrac{1}{4}.$



【参考】実は三角形の形状によらず $E(T)\cdot F(T)=\dfrac{1}{4}$ となる．

（証明） $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とすると

$$\begin{aligned}
s &= \frac{2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C}{2} \\
&= R(\sin A+\sin B+\sin C) \\
&= R\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right) \\
&= R\left(2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}\right) \\
&= 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}
\end{aligned}$$

が成り立つ．よく知られているように $S=rs$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}
E(T)\cdot F(T) &= \frac{R}{r}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \\
&= \frac{Rs}{S}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \\
&= \frac{4R^2}{S}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \\
&= \frac{R^2}{2S}\sin A\sin B\sin C \\
&= \frac{R^2}{2S}\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\sin C \\
&= \frac{1}{8S}ab\sin C \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

III O を原点とする座標平面において，第 1 象限に点 P_1 をとる。x 軸上の点 Q_1 と直線 OP_1 上の点 P_2 を $\angle OP_1Q_1 = \angle OQ_1P_2 = 90^\circ$ となるように定める。さらに，x 軸上の点 Q_2 と直線 OP_1 上の点 P_3 を $\angle OP_2Q_2 = \angle OQ_2P_3 = 90^\circ$ となるように定める。$n = 1,\ 2,\ 3$ に対して，点 P_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ で表す。

(1) $x_1 = 1,\ y_1 = \sqrt{3}$ のとき，線分 P_1Q_1 の長さは $\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ であり，

$x_2 = \boxed{\text{ウ}}$，$y_2 = \boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) $x_1 = 2,\ y_1 = \dfrac{3}{2}$ のとき，$x_2 = \dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$，$y_2 = \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

(3) $x_2 = 1,\ y_2 = 2$ のとき，$x_1 = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$，$y_1 = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(4) $y_1 = 1$ であり，x_1 および y_2 が自然数であるとすると，線分 OP_3 の長さは $\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

(5) $x_1 = 1,\ y_3 = 300$ であり，y_1 が自然数であるとすると，$y_1 = \boxed{\text{テ}}$ である。

(6) x_1 が自然数であり，y_1 は x_1 の倍数であるとする。また，2 つの不等式

$$y_2 < 64,\ x_3 > 196$$

が成り立つとする。このとき，$x_1 = \boxed{\text{ト}}$，$y_1 = \boxed{\text{ナ}}$ である。

解答

	解答記号	正解
(1)	$\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$	$2\sqrt{3}$
	$\boxed{\text{ウ}}$	4
	$\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$	$4\sqrt{3}$
(2)	$\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$	$\dfrac{25}{8}$，$\dfrac{75}{32}$
(3)	$\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$	$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5}$
(4)	$\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$	$4\sqrt{2}$
(5)	$\boxed{\text{テ}}$	3
(6)	$\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$	2，6

解説

(1) $\angle P_1OQ_1 = 60^\circ$ であることに注意せよ．下図 1 を参照のこと．

ここで一般に $x_n,\ y_n,\ x_{n+1},\ y_{n+1}$ の間に成り立つ関係を導いておこう．下図 2 において，点列 $\{P_n\}$ が存在する直線の方程式を $y = kx\ (k > 0)$ としておく．このときもちろん $y_n = kx_n,\ y_{n+1} = kx_{n+1}$ が成り立っている．また，$n \geqq 2$ として三角形 $OQ_{n-1}P_n$ と三角形 OP_nQ_n，および三角形 OP_nQ_n と三角

形 $\mathrm{OQ}_n\mathrm{P}_{n+1}$ はそれぞれ相似であり，その相似比はいずれも $1 : \sqrt{1+k^2}$ であるから，三角形 $\mathrm{OQ}_{n-1}\mathrm{P}_n$ と三角形 $\mathrm{OQ}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の相似比は $1 : (1+k^2)$ であることがわかる．したがって，

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1+k^2)x_n \\ y_{n+1} = (1+k^2)y_n \end{cases} \quad \cdots ①$$

が成り立つことに注意しておこう．以下の解答では k はこの直線の傾きとする．

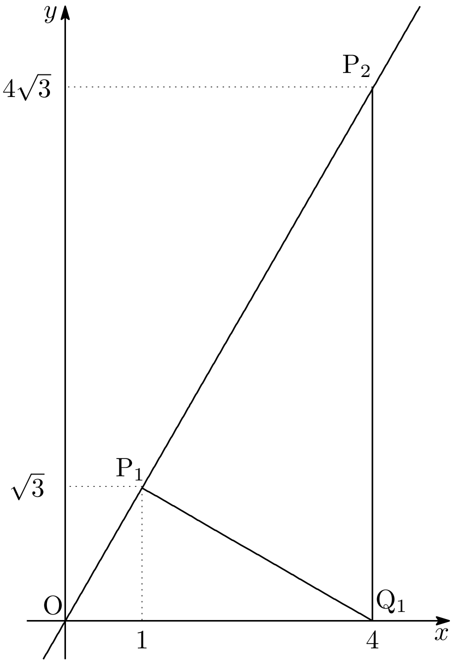


図 1

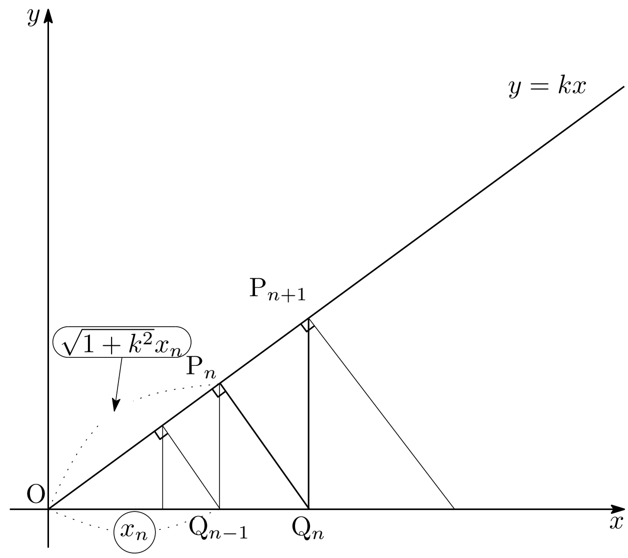


図 2

(2) $k = \dfrac{3}{4}$ であるから，$x_2 = \left\{1 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}x_1 = \dfrac{25}{8}$, $y_2 = \dfrac{3}{4}x_2 = \dfrac{75}{32}$ である．

(3) $k = 2$ であるから， $x_1 = \dfrac{1}{1+2^2}x_2 = \dfrac{1}{5}$, $y_1 = 2x_1 = \dfrac{2}{5}$ である．

(4) $x_1 = m$（m は自然数）とすると， $k = \dfrac{1}{m}$ であり，$y_2 = \left\{1 + \left(\dfrac{1}{m}\right)^2\right\}y_1 = 1 + \dfrac{1}{m^2}$ である．

題意よりこれが自然数であるから $m = 1$ になるしかない（よって $k = 1$ となり， $x_n = y_n$ である）．したがって，① より $x_{n+1} = (1+1^2)x_n = 2x_n$ が成り立ち，$x_3 = 2x_2 = 4x_1 = 4$, $y_3 = x_3 = 4$ から $\mathrm{OP}_3 = 4\sqrt{2}$ がわかる．

(5) y_1 が自然数であるから， k は自然数である．このとき，

$$y_3 = (1+k^2)y_2 = (1+k^2)^2y_1 = k(1+k^2)^2x_1 = k(1+k^2)^2 = 300$$

となるので $k = 3$ とわかる．したがって $y_1 = 3$ である．（注： $300 = k(1+k^2)^2 > k^5$ であるから $k = 1,\ 2,\ 3$ しかありえないことに気づけば絞り込めるが，そこまで考えなくても代入していけば自然と k は決まるであろう．）

(6) 題意よりこの場合も k は自然数である．$y_2 < 64$, $x_3 > 196 \iff k(1+k^2)x_1 < 64$, $(1+k^2)^2x_1 > 196$ $\cdots$ ② である．$k^3 < k(1+k^2) \leqq k(1+k^2)x_1 < 64 = 4^3$ であるから， $k = 1,\ 2,\ 3$ しかありえない．ここで，② より $\dfrac{196}{(1+k^2)^2} < x_1 < \dfrac{64}{k(1+k^2)}$ が成り立っているが，$k = 1,\ 2,\ 3$ を代入してみると，この不等式から

$$k=1 \text{ のとき，} \quad \frac{196}{4}<x_1<\frac{64}{2} \iff 49<x_1<32 \text{ となり不合理}$$

$$k=2 \text{ のとき，} \quad \frac{196}{25}<x_1<\frac{64}{10} \iff 7.84<x_1<6.4 \text{ となり不合理}$$

$$k=3 \text{ のとき，} \quad \frac{196}{100}<x_1<\frac{64}{30} \iff 1.96<x_1<2.13\cdots \text{ となるので，} \quad x_1=2$$

がわかる．したがって， $k=3$ であり， $x_1=2$，$y_1=6$ である．

講評

I　平易だった．手際よく短時間で処理して，後の問題に取りかかりたい．

II　難しくはないが，手際よく処理していけるかどうかで差が付きそう．なお，似た出題が 2012 年にあった．

III　相似な図形の連なりにおいて，相似比をいかに早く見抜けるかがポイント．後半は整数問題ではあるが，エレガントに解くことよりも強引に数値を代入して求めていくなどの力技がものをいいそう．

去年より易化した．ただし分量は多いため処理力が得点を大きく左右するだろうが，9 割は確保したい．