近畿大学医学部（後期）2014年度入学試験　解答速報　数学

平成２６年　３月　８日　実施

I

(1)　$\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ とするとき，

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} = \boxed{アイ},\quad \alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2} = \boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}},\quad \alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3} = \boxed{オカ}$$

である．

(2)　k を定数とする．x, y についての連立方程式

$$\begin{cases} 2^x + 3^{y+1} = k \\ 2^{x+2} + 3^y = 5 \end{cases}$$

を考える． $x = -1$ のとき， $k = \dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$ である．また，この連立方程式が実数解 x, y をもつとき， k のとりうる値の範囲は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}} < k < \boxed{シス}$ である．

(3)　正の整数 a, b, c が等式

$$(a+bi)(c-i) = 50$$

を満たすとする．ただし， i は虚数単位である．このとき， $a - bc = \boxed{セ}$ である．また， $a+b+c$ の最大値は $\boxed{ソタ}$ であり，最小値は $\boxed{チツ}$ である．

(4)　自然数 m, n に対して， x についての 2 次方程式

$$x^2 - mx - n = 0$$

が $x = 1+\sqrt{3}$ を解にもつとき， $m = \boxed{テ}$, $n = \boxed{ト}$ である．また，自然数 p, q に対して， x についての 3 次方程式

$$x^3 - px^2 + qx + 10 = 0$$

が $x = 1+\sqrt{3}$ を解にもつとき， $p = \boxed{ナ}$, $q = \boxed{ニ}$ である．

解答

(1) α を解にもつ 2 次方程式が $\alpha^2+\alpha-1=0$ であるから，これの両辺を α で割って

$\alpha+1-\dfrac{1}{\alpha}=0 \iff \alpha-\dfrac{1}{\alpha}=\boxed{-1}$ となるが，これくらいなら直接 $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ から計算してもよいだろう．$\alpha^2-\dfrac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)=\boxed{-}\sqrt{\boxed{5}}$,

$\alpha^3-\dfrac{1}{\alpha^3}=\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)^3+3\alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)=\boxed{-4}$

(2) $2^x=X,\ 2^y=Y$ とおくと， $X>0,\ Y>0$ であり，与えられた連立方程式は

$$\begin{cases} X+3Y=k \ \cdots \ ① \\ 4X+Y=5 \ \cdots \ ② \end{cases}$$

となる．まず， $x=-1$ のときは $X=\dfrac{1}{2}$ であり，$Y=3$ となるので， $k=\dfrac{\boxed{19}}{\boxed{2}}$ である．また,「もとの連立方程式が実数解 $x,\ y$ をもつ」 $\iff$ 「置き換えた連立方程式 ①,② が $X>0,\ Y>0$ となる解をもつ」であることに注意すると， ①,② の解 $(X,\ Y)=\left(\dfrac{15-k}{11},\ \dfrac{4k-5}{11}\right)$ がともに正であることから

$\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{4}}<k<\boxed{15}$ となる．

(3) 与えられた等式を整理すると $(ac+b)-(a-bc)i=50$ となる．複素数の相等より $ac+b=50\ \cdots$ ①, $a-bc=\boxed{0}\ \cdots$② を得る．②より $a=bc$ を ① に代入して整理すると，$b(c^2+1)=50$ となる．これより，$a,\ b,\ c$ が正の整数であることに注意すると，$a,\ b,\ c$ の組は $(a,\ b,\ c)=(7,\ 1,\ 7),\ (15,\ 5,\ 3),\ (20,\ 10,\ 2),\ (25,\ 25,\ 1)$ の 4 組となる．これより $a+b+c$ の最大値は $(a,\ b,\ c)=(25,\ 25,\ 1)$ のときの $\boxed{51}$ ，最小値は $(a,\ b,\ c)=(7,\ 1,\ 7)$ のときの $\boxed{15}$ となる．

(4) 有理数係数の方程式であるから，$x=1-\sqrt{3}$ も解である．したがって，解と係数の関係より $m=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=\boxed{2}$, $-n=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2$ より $n=\boxed{2}$ がわかる．また，題意より $x^3-px^2+qx+10$ は上で定まった 2 次式 x^2-2x-2 で割り切れる．実際に割り算を実行すると $x^3-px^2+qx+10=(x^2-2x-2)(x+2-p)+(6-2p+q)x+(14-2p)$ となるので， $6-2p+q=0$ かつ $14-2p=0$ が成り立たなければならない，したがって， $p=\boxed{7}$, $q=\boxed{8}$ となる．なお，後半については，3 次方程式の解と係数の関係を用いてもよいだろう．

II 四面体 OABC の 3 辺 OC, AC, BC を切って開いた時の展開図を座標平面上で考える．3 点 O, A, B は，それぞれ O(0, 0), A($4\sqrt{6}$, 0), B(0, $4\sqrt{6}$) に置かれ，展開する前に C であった点は，3 点 D($-3\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$), E(p, $-q$), F(r, s) に置かれたとする．ただし，$q>0$, $r+s>4\sqrt{6}$ とする．四面体 OABC の 4 つの面 △OAB, △OAC, △OBC, △ABC は，座標平面上でそれぞれ △OAB, △OAE, △OBD, △ABF になったとする．このような条件を満たす四面体 OABC のうち，体積が最大となるものを考える．また，四面体 OABC において辺 OB 上に OB⊥CH となる点 H をとり，辺 AB を 1 : 3 に内分する点を P とする．

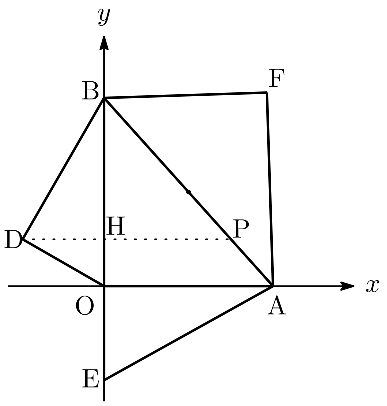
(1) $\mathrm{OE}=\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$, $\mathrm{BF}=\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$ である．

(2) $\angle\mathrm{CHP}=\alpha$ (ただし, $0\leqq\alpha\leqq\pi$) とするとき，$\alpha=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi$ である．また，C から平面 OAB に下した垂線の長さは $\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$ であり，四面体 OABC の体積は $\boxed{ケコ}\sqrt{\boxed{サ}}$ である．

(3) $\mathrm{AC}=\boxed{シ}\sqrt{\boxed{スセ}}$ であり，$\angle\mathrm{ACB}=\beta$ (ただし, $0\leqq\beta\leqq\pi$) とするとき，$\beta=\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\pi$ である．

(4) $q=\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}$, $s=\dfrac{\boxed{テ}\sqrt{\boxed{ト}}+\boxed{ナ}\sqrt{\boxed{ニヌ}}}{\boxed{ネ}}$ である．

解答



(1) $\mathrm{OE}=\mathrm{OD}=\boxed{2}\sqrt{\boxed{6}}$, $\mathrm{BF}=\mathrm{BD}=\boxed{6}\sqrt{\boxed{2}}$

(2) 底面を OAB と考えると，体積が最大になるときは C から OAB に下した垂線の長さが最大になるときである．すなわち，平面 OBC と 平面 OAB のなす角が $\dfrac{1}{2}\pi$ のときである．すなわち，

$\angle\mathrm{CHP}=\alpha=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\pi$.

C から平面 OAB に下した垂線は CH であるから，長さは $\boxed{3}\sqrt{\boxed{2}}$

四面体 OABC の体積は $\dfrac{1}{3}\times\mathrm{CH}\times\triangle\mathrm{OAB}=\boxed{48}\sqrt{\boxed{2}}$

(3) ここから空間座標で考える．A($4\sqrt{6}$, 0, 0), B(0, $4\sqrt{6}$, 0), C(0, $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$) となるので，$\mathrm{AC}=\boxed{2}\sqrt{\boxed{30}}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(-4\sqrt{6},\ \sqrt{6},\ 3\sqrt{2})\cdot(0,\ -3\sqrt{6},\ 3\sqrt{2})=0$ から $\beta=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\pi$

(4) $\mathrm{OE}^2=p^2+q^2=24,\ \mathrm{AE}^2=(p-4\sqrt{6})^2+q^2=120$ を解いて，$q=\boxed{2}\sqrt{\boxed{6}}$,

$\mathrm{AF}^2=(r-4\sqrt{6})^2+s^2=120,\ \mathrm{BF}^2=r^2+(s-4\sqrt{6})^2=72$ を解いて，$s=\dfrac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{6}}+\boxed{3}\sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{2}}$

III　O を原点とする座標平面において，$y=x^2-1$ のグラフ C と点 A$(-1,\ 0)$ を考える．A を通り，傾きが $\tan 15^\circ$ である直線を ℓ とし，C と ℓ の交点のうち A と異なるものを B，さらに C と ℓ で囲まれた部分を D とする．

(1)　A を通り，C とただ 1 つの共有点をもつ直線の方程式は

$$x=\boxed{\text{アイ}}\quad \text{または}\quad y=\boxed{\text{ウエ}}x-\boxed{\text{オ}}$$

である．

(2)　ℓ の y 切片は $\boxed{\text{カ}}-\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である．

(3)　B の x 座標は $\boxed{\text{ク}}-\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

(4)　D の面積は $\dfrac{\boxed{\text{コサシ}}-\boxed{\text{スセ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である．

(5)　条件

「D の境界線上の任意の点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\geqq-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$」

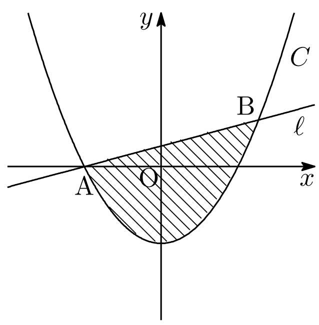
を満たす D 内の点 Q 全体の集合が表す図形の面積は

$$\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}+\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}\pi$$

である．

解答

領域 D は右図斜線部となる．



(1)　求める直線は，A で x 軸に直交する直線と，A における C の接線の 2 本．よって $x=\boxed{-1}$ または $y=\boxed{-2}x-\boxed{2}$．

(2)　$15^\circ=45^\circ-30^\circ$ とみて加法定理を用いるか，$15^\circ=\dfrac{30^\circ}{2}$ とみて倍角公式または半角公式を用いるかして $\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$ が分かる．よって ℓ の方程式は $y=(2-\sqrt{3})(x+1)$ であるから y 切片は $\boxed{2}-\sqrt{\boxed{3}}$．

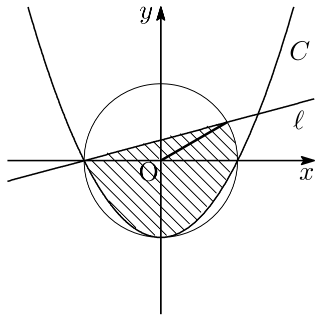
(3)　$C,\ \ell$ から y を消去すると $x^2-(2-\sqrt{3})x-3+\sqrt{3}=0$．これが点 A の x 座標である -1 を解にもつことに注意して，$(x+1)(x-3+\sqrt{3})=0$．よって B の x 座標は $\boxed{3}-\sqrt{\boxed{3}}$．

(4)　公式を用いることにより，D の面積は $\dfrac{1}{6}\{(3-\sqrt{3})-(-1)\}^3=\dfrac{\boxed{100}-\boxed{51}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{6}}$．

(5)　領域 D の内部に原点が含まれることに注意しておく．P は D の境界線上にあるので $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|>0$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \geqq -|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \Rightarrow |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\theta \geqq -|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \Rightarrow |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\theta \geqq -1$$

となる．今 θ は任意の値を取りうるから，$\cos\theta$ は $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ の範囲の任意の値をとりうる．よって $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| \leqq 1$ であると分かるので，点 Q 全体の集合が表す図形は右図の斜線部である．よってその面積は，



$$\begin{aligned}
&(x\text{軸の下部}) + (\text{頂角 }150^\circ\text{ の二等辺三角形}) + (\text{中心角 }30^\circ\text{ の扇形})\\
=\ &\frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 150^\circ + 1^2\pi\cdot\frac{30}{360}\\
=\ &\frac{\boxed{19}}{\boxed{12}} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{12}}\pi
\end{aligned}$$

講評

1．小問集合（標準）
昨年度よりも解きにくい問題が増えた．(2) の連立方程式の問題，(3) の整数問題は難しく感じた受験生も多かったのではないだろうか．

2．空間図形（標準）
四面体の展開図を扱う問題．決して難しくはないのだが，問題文に書かれてある「このような条件を満たす四面体 OABC のうち，体積が最大となるものを考える」の部分を想像できなかったり，下手に計算に入ったりすると大変．

3．領域（やや難）
(5) 以外は難しくないが計算のスピード，要領が大きく点を左右する．(5) は方針が立てば計算自体は易しいが，題意がとれなかった受験生が多かったであろう．

昨年同様点数のとりにくいセット．
問題ごとの難易の差が大きく，一か所で立ち止まってしまうと時間的にも苦しくなる．適当に見切りをつけて，うまく立ち回ることも必要か．
後期試験ということを考えるとボーダーは８割５分くらい．