近畿大学医学部（後期）2013年度入学試験　解答速報　数学

平成２５年　３月　８日　実施

I

(1)　正四面体のすべての辺の中点を頂点とする正多面体を P とする．P の辺の数は $\boxed{\text{アイ}}$ であり，面の数は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2)　座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ -2)$, $\mathrm{C}(4,\ 3)$ を通る円の中心の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)$ であり，半径を r とするとき，$r^2 = \dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である．

(3)　a, b は $a < b$ を満たす定数とする．座標平面において，2 次関数 $y = ax^2 + b$ のグラフが点 $(1,\ 10)$ を通り，直線 $y = -8x$ と点 $(c,\ d)$ で接するとき，$b = \boxed{\text{サ}}$, $d = \boxed{\text{シス}}$ である．

(4)　関数 $f(x)$ が等式 $f(x) = x^2 + \displaystyle\int_1^2 (3x - t)f'(t)\,dt$ を満たすとき，$f(x) = x^2 - \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}x + \dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である．

(5)　$\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)^5$ を展開したとき，x^3 の項の係数は $\boxed{\text{トナニ}}$ であり，すべての項の係数の和は $\boxed{\text{ヌ}}$ である．

解答

(1)　正四面体の各面に P の辺が 3 本ずつ存在する．したがって，P の辺の数は $3 \times 4 = \boxed{12}$ 個．
また，P の面の数は正四面体の面の数に，正四面体の頂点の数を加えて，$4 + 4 = \boxed{8}$ 個．

(2)　求める円の方程式を $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ とおく．A, B, C を通ることから

$$\begin{cases} 5 - 2a + b + c = 0 \\ 5 + a - 2b + c = 0 \\ 25 + 4a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

となるので，これを解いて $(a,\ b,\ c) = \left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{15}{2}\right)$

$\therefore$ 円の方程式は $\left(x - \dfrac{5}{4}\right)^2 + \left(y - \dfrac{5}{4}\right)^2 = \dfrac{85}{8}$ となるから，中心の座標は $\left(\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{4}},\ \dfrac{\boxed{5}}{\boxed{4}}\right)$ であり，$r^2 = \dfrac{\boxed{85}}{\boxed{8}}$ である．

(3)　$y = ax^2 + b$ が $(1,\ 10)$ を通るから $a + b = 10$．また，$y = ax^2 + b$ と $y = -8x$ が接することから，$ax^2 + 8x + b = 0$ が重解を持つことになり，この式の判別式を D として，$D/4 = 16 - ab = 0$ が成り立つ．
$a + b = 10,\ ab = 16$ から $(a,\ b) = (2,\ 8)$ が求まり，$ax^2 + 8x + b = 2(x + 2)^2 = 0$ から $(c,\ d) = (-2,\ 16)$
以上により，$b = \boxed{8}$, $d = \boxed{16}$ である．

(4)　$f(x) = x^2 + 3x\displaystyle\int_1^2 f'(t)\,dt - \int_1^2 tf'(t)\,dt$ なので，$A = \displaystyle\int_1^2 f'(t)\,dt,\ B = \int_1^2 tf'(t)\,dt$ とおくと
$f(x) = x^2 + 3Ax - B$ となる．$A,\ B$ の定義式から

$$A = \int_1^2 (2t+3A)\,dt = \left[t^2+3At\right]_1^2 = 3A+3$$
$$B = \int_1^2 (2t^2+3At)\,dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{3A}{2}t^2\right]_1^2 = \frac{9A}{2} + \frac{14}{3}$$

これらを解いて $(A,\ B) = \left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{25}{12}\right)$ が求まり，$f(x) = x^2 - \dfrac{\boxed{9}}{\boxed{2}}x + \dfrac{\boxed{25}}{\boxed{12}}$ となる.

(5) $\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)^5 = \displaystyle\sum_{n=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_n (2x)^n (-\tfrac{1}{x})^{5-n}$ なので，x^3 の係数は ${}_5\mathrm{C}_4\,2^4(-1)^1 = \boxed{-80}$

また，すべての項の係数の和は $x=1$ を代入して $\left(2\cdot 1 - \dfrac{1}{1}\right)^5 = \boxed{1}$ となる.

II

(1) $10 \leqq n < 100$ を満たす自然数 n のうち，$p<q$ を満たす 2 つの素数 $p,\ q$ を用いて $n=p^2q$ と表すことのできるもの全体の集合を G とする．G の要素 n のうちで，$[\sqrt[3]{n}]=3$ を満たすもの全体の集合を H とする．ただし，$[x]$ は実数 x を超えない最大の整数を表す.

(i) G の要素の個数は $\boxed{アイ}$ である.

(ii) H の要素の個数は $\boxed{ウ}$ である.

(iii) H の要素のうちで最小の自然数を m とするとき，m のすべての正の約数の和は $\boxed{エオ}$ である.

(2) さいころを 3 回投げ，出た目の数を順に $a,\ b,\ c$ とする．このとき，原点を O とする座標平面において，点 $\mathrm{A}(a,\ -a)$ と点 $\mathrm{B}(b,\ c)$ をとる.

(i) $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の最大値は $\boxed{カキ}$ である.

(ii) $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積が 8 となる確率は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}$ である.

(iii) $\triangle\mathrm{OAB}$ が直角三角形となる確率は $\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセ}}$ である.

解答

(1) (i) $p=2$ のときは $n=4q<100$ より $q \leqq 24$，また $p=3$ のときは $n=9q<100$ より $q \leqq 11$，また $5 \leqq p < q$ のときは $n \geqq 5^2\cdot 7 = 175 > 100$ なので $p,\ q$ は存在しない．以上に注意して $p,\ q$ の組をすべて書き出すと以下の通り．(試験の際はまず書き出してみれば $p,\ q$ の上限は見えるだろう)

p	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3
q	3	5	7	11	13	17	19	23	5	7	11
p^2q	12	20	28	44	52	68	76	92	45	63	99

よって G の要素の個数は $\boxed{11}$ 個.

(ii) $[\sqrt[3]{n}]=3 \iff 3 \leqq \sqrt[3]{n} < 4 \iff 27 \leqq n < 64$ なので上表から $H=\{28,\ 44,\ 52,\ 45,\ 63\}$ と分かる．よって H の要素の個数は $\boxed{5}$ 個.

(iii) $m = 28 = 2^2\cdot 7$ なのでその正の約数の和は $(1+2+2^2)(1+7) = \boxed{56}$.

(2) (i) $\triangle$ABC の面積を S とすると $S=\dfrac{1}{2}|ac-(-a)b|=\dfrac{1}{2}a(b+c)$ なので S は $a=b=c=6$ のとき最大となりこのとき $S=\boxed{36}$.

(ii) $S=8 \iff a(b+c)=16$ である．これをみたすのは $(a,\ b+c)=(2,\ 8),\ (4,\ 4)$ のみでありそれぞれの $a,\ b,\ c$ の組は 5 個，3 個の計 8 個である $(6\times 6$ の表に $b+c$ の値を書き込むとよいだろう$)$．よって求める確率は $\dfrac{8}{6^3}=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{27}}$.

(iii) (ア) $\angle\mathrm{O}=90^\circ$ となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ より $a(b-c)=0$ となればよいと分かる．よって a は任意で $b=c$ となればよいから $6\times 6=36$ 通り．

(イ) $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より $2a+c=b$ となればよいと分かる．$1\leqq 2a+c\leqq 6$ をみたす $a,\ c$ は 6 組あるので 6 通り $(6\times 6$ の表に $2a+c$ の値を書き込むとよいだろう$)$.

(ウ) $\angle\mathrm{B}=90^\circ$ となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=0$ より $a=\dfrac{b^2+c^2}{b-c}$ となればよいと分かる．これより $b>c$ が必要と分かる．これに注意して以下のような 2 つの表を作り，$\dfrac{b^2+c^2}{b-c}$ が 1 から 6 までの整数になるものをさがすと，適するのは $(a,\ b,\ c)=(5,\ 2,\ 1),\ (5,\ 3,\ 1)$ の 2 組と分かる．

$b \backslash c$	1	2	3	4	5	6
1						
2	1					
3	2	1				
4	3	2	1			
5	4	3	2	1		
6	5	4	3	2	1	

表内は $b-c$ の値

$b \backslash c$	1	2	3	4	5	6
1						
2	5					
3	10	13				
4	17	20	25			
5	26	29	34	41		
6	37	40	45	52	61	

表内は b^2+c^2 の値

以上から求める確率は $\dfrac{36+6+2}{6^3}=\dfrac{\boxed{11}}{\boxed{54}}$.

III

$\triangle$ABC において，$\angle\mathrm{A}=36^\circ$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$ とする．辺 AC 上に点 D があり，$\angle\mathrm{ABD}=36^\circ$ を満たすとする．$\mathrm{AD}=x$ とおく．

(1) $x+x^2=\boxed{\text{ア}}$ であり，$x=\dfrac{\boxed{\text{イウ}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．したがって，

$$\sin 18^\circ=\frac{\boxed{\text{カキ}}+\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}},\quad \cos 36^\circ=\frac{\boxed{\text{コ}}+\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である．

(2) $\triangle$ABC の面積を S_1，$\triangle$BCD の面積を S_2，$\triangle$ABD の面積を S_3 とする．このとき，

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\boxed{\text{ス}}+\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}},\quad \frac{S_1}{S_3}=\frac{\boxed{\text{タ}}+\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である．

(3)　$\theta = 36^\circ$ とおく．このとき，

$$\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\sin^2 2\theta} = \boxed{\text{テ}},\ \tan^4\theta + \tan^4 2\theta = \boxed{\text{トナ}}$$

である．

解答

(1)　$\triangle$ABC と $\triangle$BCD は相似であるから，AB : BC = BC : CD より $1 : x = x : (1-x)$．これより $x + x^2 = \boxed{1}$ であり，$x > 0$ に注意して $x = \dfrac{\boxed{-1} + \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$ となる．線分 BC の中点を M とすると，$\sin 18^\circ = \dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{x}{2} = \dfrac{\boxed{-1} + \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{4}}$．また．線分 AB の中点を N とすると，$\cos 36^\circ = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{\boxed{1} + \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{4}}$

(2)　$\triangle$ABC と $\triangle$BCD の相似比は $1 : x$ であるから，$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\boxed{3} + \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$．

また，$\dfrac{S_1}{S_3} = \dfrac{S_1}{S_1 - S_2} = \dfrac{S_1}{S_1 - x^2 S_1} = \dfrac{1}{1 - x^2} = \dfrac{\boxed{1} + \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$

(3)　$\cos 2\theta = \cos 72^\circ = \cos(90^\circ - 18^\circ) = \sin 18^\circ$，$\cos 4\theta = \cos 144^\circ = \cos(180^\circ - 36^\circ) = -\cos 36^\circ$ に注意しておくと，

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{1 + \cos 18^\circ}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \quad (= \alpha \text{ とおく}) \\ \sin^2 2\theta &= \frac{1 - \cos 4\theta}{2} = \frac{1 - \cos 36^\circ}{2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \quad (= \beta \text{ とおく})\end{aligned}$$

α, β は共役であり，$\alpha + \beta = \dfrac{5}{4}$, $\alpha\beta = \dfrac{5}{16}$ であることが分かる．これより，

$$\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\sin^2 2\theta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{16}} = \boxed{4}.$$

次に $\gamma = \tan^2\theta = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{\alpha}{1 - \alpha}$，$\delta = \tan^2 2\theta = \dfrac{\sin^2 2\theta}{\cos^2 2\theta} = \dfrac{\beta}{1 - \beta}$ とおくと，

$$\gamma + \delta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} + \frac{\beta}{1 - \beta} = \frac{\alpha + \beta - 2\alpha\beta}{1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{5}{8}}{1 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16}} = 10,$$

$$\gamma\delta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \frac{\beta}{1 - \beta} = \frac{\alpha\beta}{1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta} = \frac{\frac{5}{16}}{1 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16}} = 5 \text{ であり，}$$

$$\tan^4\theta + \tan^4 2\theta = \gamma^2 + \delta^2 = (\gamma + \delta)^2 - 2\gamma\delta = 100 - 10 = \boxed{90}.$$

講評

1．小問集合（易）　(1) は少々珍しいが難しくはない．他はすべて典型的な問題．ここは取りこぼしたくない．

2．(1)　整数問題（標準）　問題文をよく読んで，数え上げていくだけ．
　(2)　確率（標準〜やや難）　(1) と同様数え上げていくだけだが，(iii) はかなり苦労する．

3．三角関数（やや難）　単なる計算問題だが，要領よくやらないと大変．

昨年度に比べて点数がとりにくい設定となった．本質的に難しいわけではないが，正確な処理力を問う問題が多く，なかなか正解までもっていきづらい．とはいえ，後期試験ということを考えると８割５分は欲しいところ．