川崎医科大学 2016年度入学試験 解答速報 数学

2016年1月24日 実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ とする。

(1) $a=100\log_{10}105$ とするとき，a 以下の最も大きい整数は $\boxed{\text{アイウ}}$ である。

(2) 3^{500} は $\boxed{\text{エオカ}}$ 桁の数である。また最高位 (先頭) の数字は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(3) すべての正の整数 n に対して，3^n の一の位 (末尾) の数字は $\boxed{\text{ク}}$ 種類ある。3^{500} の一の位の数字は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

(4) 3^{500} を 60 でわった余りは $\boxed{\text{コサ}}$ である。

(5) 2 元 1 次不定方程式 $172x-53y=1$ の整数解のうち，x の絶対値が最も小さい解は $x=-\boxed{\text{シス}}$，$y=-\boxed{\text{セソ}}$ である。

解答

アイウ $\boxed{202}$　エオカ $\boxed{239}$　キ $\boxed{3}$　ク $\boxed{4}$　ケ $\boxed{1}$　コサ $\boxed{21}$

シス $\boxed{04}$　セソ $\boxed{13}$

解説

(1) $a=100\log_{10}3\cdot5\cdot7=100\log_{10}3\cdot\dfrac{10}{2}\cdot7=100(0.4771+1-0.3010+0.8451)=202.12$ であるから，a 以下の最も大きい整数は 202.

(2) $\log_{10}3^{500}=500\cdot0.4771=238.55$ であるから，

$$238\leqq\log_{10}3^{500}<239 \iff 10^{238}\leqq3^{500}<10^{239}$$

となるので，3^{500} は 239 桁の数.
次に，$\log_{10}3=0.4771,\ \log_{10}4=0.6020$ に注意すると，

$$238+\log_{10}3\leqq238.55<238+\log_{10}4 \iff 3\cdot10^{238}\leqq3^{500}<4\cdot10^{238}$$

であるから，最高位の数字は 3.

(3) 合同式の法を 10 にとると，$3^1\equiv3,\ 3^2\equiv9,\ 3^3\equiv7,\ 3^4\equiv1,\ 3^5\equiv3,\ \cdots$ より 3^n の一の位は $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して $3,\ 9,\ 7,\ 1,\ 3,\ 9,\ 7,\ 1,\ 3,\ \cdots$ となるので，一の位の数字は 4 種類ある．また，$3^{500}=(3^4)^{125}\equiv1$ より 3^{500} の一の位の数字は 1.

(4) 合同式の法を 60 にとると，$3^1\equiv3,\ 3^2\equiv9,\ 3^3\equiv27,\ 3^4\equiv21,\ 3^5\equiv3,\ \cdots$ より 3^n を 60 で割った余りは $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して $3,\ 9,\ 27,\ 21,\ 3,\ 9,\ 27,\ 21,\ 3,\ \cdots$ となるので，k を自然数とすると，$3^{4k}\equiv21$ がわかる．したがって，$3^{500}=3^{4\cdot125}\equiv21$ から 3^{500} を 60 で割った余りは 21.

(5) 合同式の法を 53 とすると

$$\begin{aligned} 172x-53y=1 \quad &\Longleftrightarrow \quad 172x\equiv 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 13x\equiv 1 \ \cdots① \\ &\Longleftrightarrow \quad 52x\equiv 4 \ \cdots①\times 4 \quad (4 \text{ と } 53 \text{ は互いに素}) \\ &\Longleftrightarrow \quad -x\equiv 4 \\ &\Longleftrightarrow \quad x\equiv -4 \end{aligned}$$

であるから， x は k を整数として $x=-4+53k$ と表される．したがって x の絶対値が最も小さい解は $x=-4$ であり，そのとき $y=-13$ である．

筆算でやるならば

$172x-53y$	x	y	
172	1	0	
-53	0	1	これを 3 倍して 1 つ上と足す
13	1	3	これを 4 倍して 1 つ上と足す
-1	4	13	

より $172\cdot 4-53\cdot 13=-1$ がわかるので，両辺を (-1) 倍して $172\cdot(-4)-53\cdot(-13)=1$ となる．これより一般解が k を整数として $(x,\ y)=(-4+53k,\ -13+172k)$ であることがわかるので，題意をみたすのは $(x,\ y)=(-4,\ -13)$ となる．

2 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とするとき，複素数平面上で

$$\alpha = 3(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\beta = 3\{(\cos\theta - \sin\theta) + i(\cos\theta + \sin\theta)\}$$

の表す点を，それぞれ A，B とする。原点を O とする。また，$\arg z$ は複素数 z の偏角を表すものとし，$-\pi \leqq \arg z < \pi$ の範囲とする。

(1) $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ア}}}$，$\arg\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$，$|\beta - \alpha| = \boxed{\text{エ}}$，$\arg\dfrac{\beta - \alpha}{-\alpha} = -\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi$ である。

(2) 三角形 OAB の外接円の直径は，$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(3) $\gamma = -\dfrac{9\sqrt{3}}{\beta}$ で表される点 C が，三角形 OAB の外接円上にあるとする。このとき，

$$\arg\frac{\beta - \gamma}{-\gamma} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi, \quad \text{または} \quad \arg\frac{\beta - \gamma}{-\gamma} = -\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi \quad \cdots①$$

である。①を満たす θ を，小さい順に θ_1，θ_2 とする。このとき，$\theta_1 = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$，$\theta_2 = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$

である。

$\theta = \theta_1$ のとき，

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\left(\sqrt{\boxed{\text{チ}}}\,\boxed{\text{ツ}}\,i\right)$$

$$\beta = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\left\{\left(\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\,\boxed{\text{ニ}}\,1\right) + \left(\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}\,\boxed{\text{ネ}}\,1\right)i\right\}$$

$$\gamma = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}\left\{\left(\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}\,\boxed{\text{フ}}\,3\right) + \left(\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}\,\boxed{\text{ホ}}\,3\right)i\right\}$$

である。ここで，$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$，$\boxed{\text{ネ}}$，$\boxed{\text{フ}}$，$\boxed{\text{ホ}}$ は，それぞれ，符号 $+$，$-$ のいずれかである。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) ア $\sqrt{\boxed{2}}$　イウ $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{4}}\pi$　エ $\boxed{3}$　オカ $-\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\pi$

(2) キク $\boxed{3}\sqrt{\boxed{2}}$

(3) ケコ $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\pi$　サシ $-\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\pi$　ス $\dfrac{\pi}{\boxed{6}}$　セ $\dfrac{\pi}{\boxed{3}}$

ソタチツ $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}\left(\sqrt{\boxed{3}}\boxed{+}i\right)$

テトナニヌネ $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}\left\{\left(\sqrt{\boxed{3}}\boxed{-}1\right)+\left(\sqrt{\boxed{3}}\boxed{+}1\right)i\right\}$

ノハヒフヘホ $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\left\{\left(\sqrt{\boxed{3}}\boxed{-}3\right)+\left(\sqrt{\boxed{3}}\boxed{+}3\right)i\right\}$

$\boxed{\text{解説}}$

(1) $\beta=3\sqrt{2}\left\{\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$ より $\dfrac{\beta}{\alpha}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

よって $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\sqrt{2}$，$\arg\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\pi}{4}$.

また，$\beta-\alpha=3(-\sin\theta+i\cos\theta)=3i(\cos\theta+i\sin\theta)=3\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}$,

$-\alpha=3\{\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)\}$ より $\dfrac{\beta-\alpha}{-\alpha}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

よって $|\beta-\alpha|=3$，$\arg\dfrac{\beta-\alpha}{-\alpha}=-\dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{別解 1}}$

$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\sqrt{2}$，$\arg\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\pi}{4}$ とわかった時点で，$\triangle$OAB は $\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形とわかる．点 O を点 A を中心として $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したものが点 B であることがわかるので，$|\beta-\alpha|=3$，$\arg\dfrac{\beta-\alpha}{-\alpha}=-\dfrac{\pi}{2}$ が得られる．

$\boxed{\text{別解 2}}$

まず，$\beta-\alpha=3(-\sin\theta+i\cos\theta)=3i(\cos\theta+i\sin\theta)=i\alpha$ から，$\triangle$OAB は $\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形とわかる．そこから，$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\sqrt{2}$，$\arg\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\pi}{4}$，$|\beta-\alpha|=3$，$\arg\dfrac{\beta-\alpha}{-\alpha}=-\dfrac{\pi}{2}$ が得られる．

(2) (1) の $\arg\dfrac{\beta-\alpha}{-\alpha}$ の値より $\angle\mathrm{BAO}=\dfrac{\pi}{2}$ とわかるので，$\triangle\mathrm{OAB}$ の外接円は OB を直径とすることがわかる．したがって，直径は $|\beta|=3\sqrt{2}$.

(3) (2) の考察から，

$$\begin{aligned}
&\text{点 C が }\triangle\mathrm{OAB}\text{ の外接円上にある}\\
\Longleftrightarrow\ &\text{点 C が OB を直径とする円周上にある}\\
\Longleftrightarrow\ &\quad \angle\mathrm{OCB}=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

よって，$\arg\dfrac{\beta-\gamma}{-\gamma}=\pm\dfrac{\pi}{2}$ となるので，$\dfrac{\beta-\gamma}{-\gamma}$ の実部が 0 となる条件を求める．

$\dfrac{\beta-\gamma}{-\gamma}=-\dfrac{\beta}{\gamma}+1=\dfrac{\beta^2}{9\sqrt{3}}+1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left\{\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}+1$

$=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin 2\theta+1+i\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos 2\theta$ より，実部が 0 になる条件は，$\sin 2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

よって，$\theta=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}$.

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，

$$\begin{aligned}
\alpha&=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}(\sqrt{3}+i)\\
\beta&=3\left\{\left(\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\right)+i\left(\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\frac{3}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i\}\\
\gamma&=-\frac{9\sqrt{3}\,\overline{\beta}}{|\beta|^2}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}\{(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)i\}=\frac{3}{4}\{(\sqrt{3}-3)+(\sqrt{3}+3)i\}
\end{aligned}$$

である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を 0 以上の整数とし，$f_n(x) = \sin(2^n x)$ とする。各 n に対して，$f_n(x) = f_{n+1}(x)$ を満たす正の x のうち，最小の x を x_n とする。さらに

$$S_n = \int_{x_{n+1}}^{x_n} \{f_{n+1}(x) - f_n(x)\}\, dx$$

とする。

(1) $x_0 = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi,\ x_1 = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi,\ x_2 = \dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}\pi$ である。

(2) $S_0 = \dfrac{\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}},\ S_1 = \dfrac{\boxed{\text{シ}} - \sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(3) $S_n < \dfrac{1}{100}$ となる最小の n の値は $\boxed{\text{ソ}}$ である。

(4) $\displaystyle\int_0^{x_0} \{f_0(x)\}^2\, dx = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\pi - \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(5) $\displaystyle\int_0^{x_0} f_0(x) f_1(x)\, dx = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

(6) 曲線 $y = f_{n+1}(x) - f_n(x)$ $(0 \leqq x \leqq x_n)$, x 軸，および直線 $x = x_n$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n とする。このとき

$$V_0 = \dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\pi^2 - \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}\pi,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n = \dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}\pi^2 - \dfrac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}\sqrt{\boxed{\text{ミ}}}\pi$$

である。

解答

(1) アイ $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$ ウエ $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{6}}$ オカキク $\dfrac{\boxed{01}}{\boxed{12}}$

(2) ケコサ $\dfrac{\boxed{2}-\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}$ シスセ $\dfrac{\boxed{2}-\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{4}}$

(3) ソ $\boxed{4}$

(4) タチツテ $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{6}}\pi-\dfrac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{8}}$

(5) トナ $\dfrac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{4}}$

(6) ニヌネノハヒ $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\pi^2-\dfrac{\boxed{9}}{\boxed{16}}\sqrt{\boxed{3}}\pi$ フヘホマミ $\dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\pi^2-\dfrac{\boxed{9}}{\boxed{8}}\sqrt{\boxed{3}}\pi$

解説

(1) $f_{n+1}(x)=\sin(2^{n+1}x)=2\sin(2^n x)\cos(2^n x)$ であるから，$f_n(x)=f_{n+1}(x)$ より $\sin(2^n x)\{2\cos(2^n x)-1\}=0$．したがって，$k$ を整数として，$\sin(2^n x)=0$ から $2^n x=k\pi$，また，$\cos(2^n x)=\dfrac{1}{2}$ から $2^n x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ となる．したがって，これを満たす正の x のうち最小のものは，後者の x のうち $k=0$ のときのものであるから，$x_n=\dfrac{\pi}{3\cdot 2^n}$．したがって，$x_0=\dfrac{\pi}{3}$，$x_1=\dfrac{\pi}{6}$，$x_2=\dfrac{\pi}{12}$ である．

(2) $S_n=\displaystyle\int_{x_{n+1}}^{x_n}\left\{\sin(2^{n+1}x)-\sin(2^n x)\right\}dx=\left[-\frac{1}{2^{n+1}}\cos(2^{n+1}x)+\frac{1}{2^n}\cos(2^n x)\right]_{x_{n+1}}^{x_n}$

$=-\dfrac{1}{2^{n+1}}\cos\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{1}{2^n}\cos\dfrac{\pi}{3}-\left(-\dfrac{1}{2^{n+1}}\cos\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2^n}\cos\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2^{n+1}}$.

したがって $S_0=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$，$S_1=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.

(3) $S_n<\dfrac{1}{100}$ より，$100(2-\sqrt{3})<2^{n+1}$ を得る．$\sqrt{3}=1.732$ として近似計算すると，$100(2-\sqrt{3})=26.8$．従って最小の n は $n=4$.
(注；もっと厳密にやることもできるが，空所補充なので本番ではこれでよいだろう)

(4) $\displaystyle\int_0^{x_0}\{f_0(x)\}^2\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

(5) $\displaystyle\int_0^{x_0}f_0(x)f_1(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\sin 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\sin^2 x\cos x\,dx=\left[\frac{2}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(6) $g_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)$ とする．$0 \leqq x \leqq x_n$ における $g_n(x)=0$ の解は $x=0,\ x_n$ であるから，$V_n=\displaystyle\int_0^{x_n}\pi\{g_n(x)\}^2\,dx$ である．(問題文中では，領域の境界として「直線 $x=x_n$ 」が挙げられているが，実は無関係である)

$\{g_0(x)\}^2=(\sin 2x-\sin x)^2=\sin^2 2x-2\sin 2x\sin x+\sin^2 x$ であるから，

$$\frac{V_0}{\pi}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 2x\,dx-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\sin 2x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\,dx$$

このうち後ろの 2 項では (4), (5) の結果が使える．

また，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{16}$ であるから，

$$\frac{V_0}{\pi}=\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{16}\right)-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\left(\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{1}{3}\pi-\frac{9}{16}\sqrt{3}.$$

したがって $V_0=\dfrac{1}{3}\pi^2-\dfrac{9}{16}\sqrt{3}\pi.$

また，$g_{n+1}(x)=g_n(2x)$ なので，$y=g_{n+1}(x)$ のグラフは $y=g_n(x)$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍したものである．したがって，数列 $\{V_n\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列と分かるから，

$$\sum_{n=0}^{\infty}V_n=\frac{V_0}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\pi^2-\frac{9}{8}\sqrt{3}\pi.$$

講評

$\boxed{1}$ 対数と整数からなる小問集合．新課程の分野である整数が出題された．ユークリッドの互除法などの典型題の練習をキチンとしてきたかで差がつくだろうが，2 番，3 番に比べると易しい．ここで高得点が欲しい．

$\boxed{2}$ 複素数平面のかなり本格的な問題が出題された．新しい分野だが毛嫌いせず，しっかり勉強しておかないと対応できない．最初に β を極形式で表すことができないと致命的．

$\boxed{3}$ まず題意がとれるかどうか，次に $\{x_n\}$ の一般項が出せるかどうか．この 2 点で大きく差がつきそう．これらを突破出来れば，積分の計算自体はさほど難しくはない．最後の極限は，$\{V_n\}$ が公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列と見破れると早いが，少しハードルが高いか．

新課程ならではの内容が多く含まれるセットだった．去年同様，得点しにくい出題で，全体で 6 割とれれば上出来である．

医歯学部進学予備校 メビオ

〒540-0033 大阪市中央区石町2-3-12 ベルヴォア天満橋

TEL 06-6946-0109 FAX 06-6941-9416

http://www.mebio.co.jp/

MeBio Scholastics