福岡大学医学部 2018年度入学試験 解答速報 数学

2018年2月2日 実施

［I］ 次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当欄に記入せよ。

(i) 自然数 234234 の正の約数は全部で $\boxed{\ (1)\ }$ 個ある。また，これらの約数のうち，3 より大きな素数であるものを全て掛け合わせた値を n とする．このとき，自然数 n を 8 進法で表すと $\boxed{\ (2)\ }$ である。

(ii) ある試験の 5 人の点数は，A 君が 97 点，B 君が 86 点，C 君が 66 点であり，D 君は E 君よりも 10 点低かったという。テストの中央値が 86 点となるとき，D 君の点数 x の値の範囲は $\boxed{\ (3)\ }$ であり，x がこの範囲にあるとき，分散の最小値は $\boxed{\ (4)\ }$ である。

(iii) $-1-\sqrt{2} \leqq x \leqq 1+\sqrt{2}$ を満たす全ての x に対して $bx^2-2ax-b-4 \leqq 0$ が成立する。このとき，a と b が満たす連立不等式によって表される領域の面積は $\boxed{\ (5)\ }$ であり，この領域内において $k=\dfrac{b+2-\sqrt{2}}{a+3\sqrt{2}}$ がとりうる値の範囲は $\boxed{\ (6)\ }$ である.

解答

(1) 72 (2) 1751 (3) $76 \leqq x \leqq 86$ (4) $\dfrac{544}{5}$ (5) $3\pi+4$ (6) $-1 \leqq k \leqq \dfrac{1}{3}$

解説

(i) $234234 = 2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13^2$ である．したがって，正の約数は全部で $2\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 3 = \mathbf{72}$ 個ある．これらの約数のうち，3 より大きな素数であるものは 7, 11, 13 であるから，$n = 7\cdot 11\cdot 13 = 1001$ である．よって，これを 8 進法で表すと $\mathbf{1751_{(8)}}$

8 で割った余り

$$\begin{array}{r|l l}
8 & 1001 & \\
8 & 125 & \cdots \boxed{1} \\
8 & 15 & \cdots \boxed{5} \\
 & \boxed{1} & \cdots \boxed{7}
\end{array}$$

$\therefore\ 1001_{(10)} = 1751_{(8)}$

(ii) テストの中央値が 87 点となるのは，D 君の点数 x と E 君の点数 $x+10$ について，$x \leqq 86 \leqq x+10$ が成り立つときである．したがって，x の範囲は $\mathbf{76 \leqq x \leqq 86}$ である．

次に，平均点が $\dfrac{97+86+66+x+(x+10)}{5} = \dfrac{2x+259}{5}$ であることから，

$$\begin{aligned}
\text{（分散）} &= \text{(2 乗の平均)} - \text{(平均の 2 乗)} \\
&= \frac{97^2+86^2+66^2+x^2+(x+10)^2}{5} - \left(\frac{2x+259}{5}\right)^2 \\
&= \frac{6x^2-936x+5(97^2+86^2+66^2+10^2)-259^2}{25} \\
&= \frac{6(x-78)^2-6\cdot 78^2+5(97^2+86^2+66^2+10^2)-259^2}{25}
\end{aligned}$$

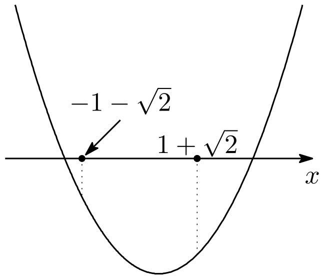
であるから，分散は $x=78$ のとき最小値をとる（したがって，D 君は 78 点，E 君は 88 点である）．このとき 5 人の点数の平均は 83 点となるので，求める分散の最小値は

$$\frac{(97-83)^2+(86-83)^2+(66-83)^2+(78-83)^2+(88-83)^2}{5}=\frac{\mathbf{544}}{\mathbf{5}}$$ である．

(iii) $f(x)=bx^2-2ax-b-4$ とおく．

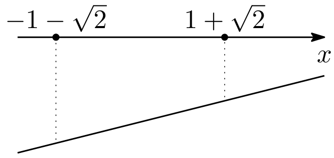
Ⓐ $b>0$ のとき， $f(-1-\sqrt{2})\leqq 0$ かつ $f(1+\sqrt{2})\leqq 0$ であればよい．このとき，

$$f(-1-\sqrt{2})\leqq 0 \iff b\leqq -a+2(\sqrt{2}-1)$$
$$f(1+\sqrt{2})\leqq 0 \iff b\leqq a+2(\sqrt{2}-1)$$



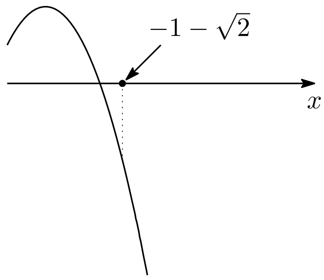
Ⓑ $b=0$ のとき， $f(x)=-2ax-b-4$ であるから， $f(-1-\sqrt{2})\leqq 0$ かつ $f(1+\sqrt{2})\leqq 0$ であればよい．このとき，

$$f(-1-\sqrt{2})\leqq 0 \iff a\leqq 2(\sqrt{2}-1)$$
$$f(1+\sqrt{2})\leqq 0 \iff a\geqq -2(\sqrt{2}-1)$$



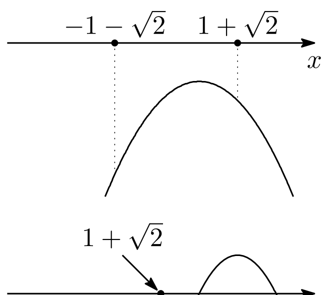
Ⓒ $b<0$ のとき，関数 $y=f(x)$ のグラフの軸の方程式は $x=\dfrac{a}{b}$ であるから，

㋐ $\dfrac{a}{b}\leqq -1-\sqrt{2} \iff b\geqq -(\sqrt{2}-1)a$ のとき，$f(-1-\sqrt{2})\leqq 0$ であればよい．したがって， $b\leqq -a+2(\sqrt{2}-1)$

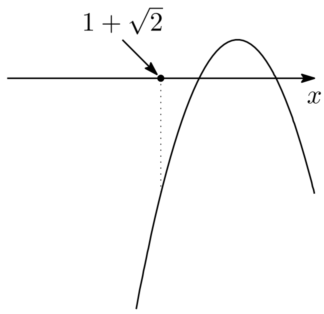


㋑ $-1-\sqrt{2}<\dfrac{a}{b}<1+\sqrt{2} \iff b<-(\sqrt{2}-1)a$ かつ $b<(\sqrt{2}-1)a$ のとき，$f\left(\dfrac{a}{b}\right)\leqq 0$ であればよい．したがって，

$$f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{a^2}{b}-\frac{2a^2}{b}-b-4\leqq 0$$
$$\iff \quad a^2+(b+2)^2\leqq 4$$



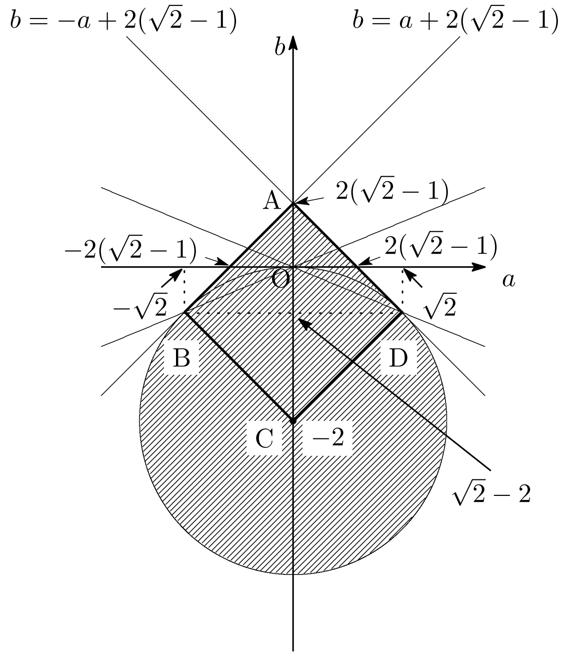
㋒ $\dfrac{a}{b}\geqq 1+\sqrt{2} \iff b\geqq(\sqrt{2}-1)a$ のとき，$f(1+\sqrt{2})\leqq 0$ であればよい．したがって， $b\leqq a+2(\sqrt{2}-1)$



以上により，a, b がみたす連立不等式によって表される領域は右図の斜線部（境界を含む）となる．図のように点 A，B，C，D を定めると，四角形 ABCD は 1 辺の長さが 2 の正方形であるから，求める領域の面積は

(正方形 ABCD の面積) $+\ \dfrac{3}{4}$(円の面積) $=$

$\boldsymbol{3\pi+4}$



次に，

$$k=\frac{b+2-\sqrt{2}}{a+3\sqrt{2}}$$
$$\iff \quad b+2-\sqrt{2}=k(a+3\sqrt{2})\cdots ①$$

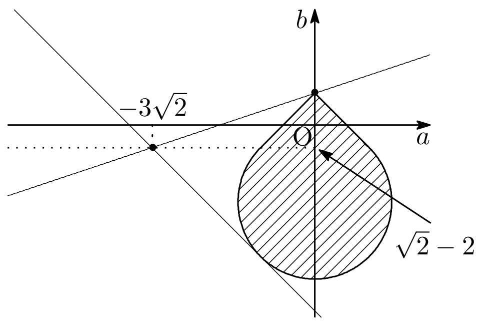
は ab 平面において，定点 $(-3\sqrt{2},\ \sqrt{2}-2)$ を通る傾きが k の直線を表す．この直線が上の領域と共有点をもつような k の値の範囲を調べるとよい．

k が最大となるのは ① が点 $(0,\ 2(\sqrt{2}-1))$ を通るときであるから，このとき $k=\dfrac{1}{3}$ である．

k が最小となるのは ① が右図のように円に接するときであるから，中心 $(0,\ -2)$ から ① までの距離が 2 となればよい．点と直線の距離の公式を用いると

$\dfrac{|3\sqrt{2}k+\sqrt{2}|}{\sqrt{k^2+1}}=2 \iff k=-1,\ \dfrac{1}{7}$

であるから，$k=-1$ が適する．以上により，求める k の値の範囲は $-1 \leqq k \leqq \dfrac{1}{3}$



［II］ 次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当欄に記入せよ。

(i) $f(x)=\cos 3x+\cos 2x+\cos x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ とおくとき，$f(x)=0$ を満たす x の値は $\boxed{(1)}$ であり，$f(x)$ の最小値は $\boxed{(2)}$ である。

(ii) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)$ を求めると $\boxed{(3)}$ である。また，平均値の定理を用いて極限値 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left|\cos^2\left(\frac{k}{n}\pi\right)-\cos^2\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\right|$ を求めると $\boxed{(4)}$ である。

解答

(1) $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3}{4}\pi$, $\dfrac{2}{3}\pi$ (2) $\dfrac{-17-7\sqrt{7}}{27}$ (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) 4

解説

(i) (1) (和) → (積) の公式により $\cos 3x+\cos x=2\cos 2x\cos x$ であるから，

$$f(x)=\cos 3x+\cos 2x+\cos x=\cos 2x(2\cos x+1)=0$$

より $\cos 2x=0$ または $2\cos x+1=0$ となる．$0 \leqq x \leqq \pi$ に注意して，前者から $\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi}$，また後者から $\boldsymbol{x=\dfrac{2}{3}\pi}$ を得る．

(2) 2 倍角，3 倍角公式から $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ であるから，$t=\cos x$ とおくことにより，

$$\begin{aligned}f(x)&=(4\cos^3 x-3\cos x)+(2\cos^2 x-1)+\cos x\\&=4t^3+2t^2-2t-1\end{aligned}$$

となる．$g(t)=4t^3+2t^2-2t-1$ とおくと，

$$g'(t)=12t^2+4t-2=2(6t^2+2t-1)=0$$

より $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{6}$ を得る．$\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{6}$, $\beta=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$ とし，$-1 \leqq t \leqq 1$ に注意して $g(t)$ の増減を調べると以下の通りとなる．

t	-1		α		β		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	-1	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

従って $f(x)$ すなわち $g(t)$ の最小値は -1 か $g(\beta)$ の大きくない方である．

$g(t)$ を $\dfrac{1}{2}g'(t)=6t^2+2t-1$ で割ることにより，

$$g(t)=(6t^2+2t-1)\left(\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}\right)-\frac{2}{9}(7t+4)$$

となり，$g'(\beta)=0$ に注意すると

$$g(\beta)=-\frac{2}{9}(7\beta+4)=\frac{-17-7\sqrt{7}}{27}<-1$$

となる．従って $f(x)$ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{-17-7\sqrt{7}}{27}}$ である．

(ii) (3) 有理化により，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(4)　$f(x)=\cos^2 x$ とおくと，$f'(x)=-2\cos x\sin x=-\sin 2x$ である．$f(x)$ は微分可能なので，平均値の定理から，$a<b$ を満たす a，b に対して

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)\quad かつ\quad a<c<b$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．$b=\dfrac{k}{n}\pi$，$a=\dfrac{k-1}{n}\pi$ とすると $b-a=\dfrac{\pi}{n}$ であるから，

$$\cos^2\left(\frac{k}{n}\pi\right)-\cos^2\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)=-\frac{\pi}{n}\sin 2x_k\quad かつ\quad \frac{k-1}{n}\pi<x_k<\frac{k}{n}\pi$$

を満たす x_k が少なくともひとつ存在する．従って，

$$\begin{aligned}(与式) &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left|-\frac{\pi}{n}\sin 2x_k\right|\\ &= \int_0^{2\pi}|\sin 2x|dx\\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx\\ &= 4\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \boldsymbol{4}\end{aligned}$$

別解

平均値の定理を用いずに以下のようにしてもよい．半角の公式を用いることにより，

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{k}{n}\pi\right)-\cos^2\left(\frac{k-1}{n}\pi\right) &= \frac{1+\cos\frac{2k}{n}\pi}{2}-\frac{1+\cos\frac{2(k-1)}{n}\pi}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2k}{n}\pi-\cos\frac{2(k-1)}{n}\pi\right)\\ &= -\sin\frac{2k-1}{n}\pi\cdot\sin\frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}(与式) &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left|-\sin\frac{2k-1}{n}\pi\cdot\sin\frac{\pi}{n}\right|\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{1}{2}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left|-\sin\frac{2k-1}{n}\pi\right|\\ &= 1\cdot\frac{1}{2}\int_0^{4\pi}|\sin x|dx\quad\left(x=\frac{2k-1}{n}\pi\ とみている\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 4\int_0^{\pi}\sin x\,dx\\ &= 2\left[-\cos x\right]_0^{\pi}\\ &= \boldsymbol{4}\end{aligned}$$

［**III**］　（記述問題）

$x > 0$ で定義された 2 つの関数 $f(x) = \left(e^{2x} - 1\right)^2$ と $g(x) = 1 + \dfrac{2}{e^{2x} - e^{-2x}}$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(i)　2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標 a を求めよ。

(ii)　k は $a \leqq \log k$ を満たす定数とする。曲線 $y = g(x)$，x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = \log k$ で囲まれた部分の面積が $\log 6 - \dfrac{1}{2}\log 5$ となるように k の値を定めよ。ただし，対数は自然対数とする。

$\boxed{\text{解答}}$

(i)　$e^{2a} = b\ (> 0)$ と置き換えることにより，

$$f(a) = g(a) \iff (b-1)^2 = 1 + \frac{2}{b - b^{-1}}$$

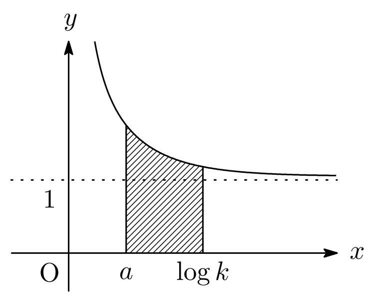
となる．この分母をはらい展開して整理すると

$$b^2(b^2 - 2b - 1) = 0$$

が得られる．$b > 0$ であるから $b = 1 + \sqrt{2}$ となり，$2a = \log b = \log(1+\sqrt{2})$ である．

つまり $a = \dfrac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$

(ii)　面積を S とする．



$$\begin{aligned}
S &= \int_a^{\log k} \left(1 + \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}}\right) dx \\
&= \int_a^{\log k} dx + \int_{1+\sqrt{2}}^{k^2} \left(\frac{2t}{t^2-1}\right) \cdot \frac{1}{2t}\, dt \quad (e^{2x} = t \text{ と置換した}) \\
&= \log k - \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\int_{1+\sqrt{2}}^{k^2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\
&= \log k - \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{1+\sqrt{2}}^{k^2} \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{k^2(k^2-1)}{k^2+1}
\end{aligned}$$

これが $\log 6 - \dfrac{1}{2}\log 5 = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{36}{5}$ に等しいのだから，$k \geqq e^a$ に注意して

$\dfrac{k^2(k^2-1)}{k^2+1} = \dfrac{36}{5}$ を解くと $k = 3$ が得られる．

講評

［**I**］［小問集合］（標準）(i) 整数問題．234234 が素因数分解できれば問題ない．標準的．(ii) データの分析．標準的．(iii) 2 次不等式で表される領域と図形問題の融合．処理も大変で内容も難しい．

［**II**］［小問集合］（標準）(i) 三角方程式と 3 次関数の融合問題．標準的だが計算がやや重い．(ii) 極限．後半が難しい．

［**III**］［数Ⅲ微積分］（標準）(i) の交点の座標を正確に計算したい．(ii) 標準的な内容だが，処理が中々大変．

難化した．標準的な問題は質量とも例年通りだが，難しい問題は一層難しくなった．[I](i)(ii), [II](i) でしっかり得点し，[III] でどれだけ正確に処理できるかが勝負を分けそう．目標は 55% .