福岡大学医学部 2017年度入学試験 解答速報 数学

2017年2月2日 実施

［I］ 次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i) 3 次方程式 $x^3-4x^2+x-3=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする。このとき，$(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$ の値は $\boxed{(\ 1\ )}$ である。また，$\dfrac{1}{2-\alpha},\ \dfrac{1}{2-\beta},\ \dfrac{1}{2-\gamma}$ を 3 つの解とする t の 3 次方程式を $t^3+at^2+bt+c=0$ とするとき，$a+b+c=$ $\boxed{(\ 2\ )}$ である。

(ii) 2 つの自然数 $A,\ B\ (A<B)$ の最小公倍数を L とする。$L^2-AB=1680$ をみたすとき，A と B の最大公約数 G を求めると，$G=$ $\boxed{(\ 3\ )}$ である。また，このような自然数の組 $(A,\ B)$ をすべて求めると，$(A,\ B)=$ $\boxed{(\ 4\ )}$ である。

(iii) 白玉 5 個と黒玉 4 個を赤，青，黄色の 3 つの箱に入れる。
玉を入れない箱があってもよいときの分け方の総数は，$\boxed{(\ 5\ )}$ 通りであり，
どの箱にも少なくとも 1 つの玉を入れるときの分け方の総数は，$\boxed{(\ 6\ )}$ 通りである。

解答

① -9 ② $-\dfrac{4}{9}$ ③ 2 ④ (6, 14), (2, 42) ⑤ 315 ⑥ 228

解説

(i) 3 次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=4,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,\ \alpha\beta\gamma=3$$

よって，

$$(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=\mathbf{-9}$$

また，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2-\alpha}+\frac{1}{2-\beta}+\frac{1}{2-\gamma}\\=&\frac{(2-\beta)(2-\gamma)+(2-\gamma)(2-\alpha)+(2-\alpha)(2-\beta)}{(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)}\\=&\frac{12-4(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2-\alpha}\cdot\frac{1}{2-\beta}+\frac{1}{2-\beta}\cdot\frac{1}{2-\gamma}+\frac{1}{2-\gamma}\cdot\frac{1}{2-\alpha}\\=&\frac{(2-\gamma)+(2-\alpha)+(2-\beta)}{(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)}=-\frac{2}{9}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2-\alpha}\cdot\frac{1}{2-\beta}\cdot\frac{1}{2-\gamma}=-\frac{1}{9}$$

より $a=-\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{2}{9}$，$c=\dfrac{1}{9}$．したがって，$a+b+c=\boldsymbol{-\dfrac{4}{9}}$．

別解 1

$f(x)=x^3-4x^2+x-3$ とおくと，$f(x)=0$ の解が $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ となることより，
$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ と因数分解できる．よって，$(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=f(2)=\boldsymbol{-9}$．

また，恒等式

$$\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3x^2-8x+1}{x^3-4x^2+x-3}$$

に $x=2$ を代入することにより，

$$\frac{1}{2-\alpha}+\frac{1}{2-\beta}+\frac{1}{2-\gamma}=\frac{1}{3}$$

が得られる．よって，$a=-\dfrac{1}{3}$．

同様に恒等式

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}+\frac{1}{(x-\beta)(x-\gamma)}+\frac{1}{(x-\gamma)(x-\alpha)}=\frac{(x-\gamma)+(x-\alpha)+(x-\beta)}{f(x)}$$

に $x=2$ を代入することにより，

$$\frac{1}{(2-\alpha)(2-\beta)}+\frac{1}{(2-\beta)(2-\gamma)}+\frac{1}{(2-\gamma)(2-\alpha)}=\frac{6-(\alpha+\beta+\gamma)}{f(2)}=-\frac{2}{9}$$

が得られる．よって，$b=-\dfrac{2}{9}$．

また，前の設問から $\dfrac{1}{2-\alpha}\cdot\dfrac{1}{2-\beta}\cdot\dfrac{1}{2-\gamma}=-\dfrac{1}{9}$ より $c=\dfrac{1}{9}$．

したがって，$a+b+c=\boldsymbol{-\dfrac{4}{9}}$．

別解 2

恒等式

$$t^3+at^2+bt+c=\left(t-\frac{1}{2-\alpha}\right)\left(t-\frac{1}{2-\beta}\right)\left(t-\frac{1}{2-\gamma}\right)$$

に $t=1$ を代入して，

$$\begin{aligned}1+a+b+c&=\left(1-\frac{1}{2-\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2-\beta}\right)\left(1-\frac{1}{2-\gamma}\right)\\&=\frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)}\\&=\frac{f(1)}{f(2)}=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

したがって，$a+b+c=\boldsymbol{-\dfrac{4}{9}}$．

(ii) 互いに素な自然数 a，b（$a<b$）を用いて，

$$A=Ga,\ B=Gb,\ L=Gab$$

と表すことができる．よって，

$$L^2-AB=1680\iff G^2a^2b^2-G^2ab=1680\iff G^2ab(ab-1)=2^4\cdot3\cdot5\cdot7$$

より G の値の候補として 1 と 2 と 4 が考えられる．

- $G=1$ のとき $(ab)^2-ab-1680=0$ の整数解はない．
- $G=2$ のとき $(ab)^2-ab-420=0$ を解くと $ab=21$．
- $G=4$ のとき $(ab)^2-ab-105=0$ の整数解はない．

以上より $G=2,\ ab=21$ であり，$(a,\ b)=(3,\ 7),\ (1,\ 21)$ であるので，$\boldsymbol{(A,\ B)=(6,\ 14),\ (2,\ 42)}$ である．

(iii) (5) 玉を入れない箱があってもよい場合

白玉 5 個を異なる 3 つの箱に分ける分け方は ○○○○○｜｜ の並べ方と同じなので $\dfrac{7!}{5!2!}=21$ 通り．黒玉 4 個を異なる 3 つの箱に分ける分け方は ●●●●｜｜ の並べ方と同じなので $\dfrac{6!}{4!2!}=15$ 通り．したがって，$21\times 15=$**315 通り**．

(6) どの箱にも少なくとも 1 つの玉を入れるとき

空箱ができる場合を (5) の答から引く方針で求める．

- 赤，青が空箱になる場合は 1 通り．
- 赤，黄が空箱になる場合は 1 通り．
- 青，黄が空箱になる場合は 1 通り．
- 赤箱のみが空になる場合
  白玉 5 個を青箱，黄箱に分ける分け方は ○○○○○｜ の並べ方と同じなので 6 通り．
  黒玉 4 個を青箱，黄箱に分ける分け方は ●●●●｜ の並べ方と同じなので 5 通り．
  ただし，「赤，青がともに空箱になる場合」と「赤，黄がともに空箱になる場合」を除かないといけないので，赤箱のみが空になる場合は $5\times 6-2=28$ 通り．
- 青箱のみが空になる場合も同様に 28 通り．
- 黄箱のみが空になる場合も同様に 28 通り．

以上より求める場合の数は $315-3-28\times 3=$**228 通り**．

［II］ 次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i) $0 \leqq x \leqq \dfrac{5\pi}{6}$ のとき，$\sin x = t$ をみたす x が1つであるような t の値の範囲は $\boxed{(1)}$ である。また，方程式 $3\cos 2x + 4\sin x - k = 0$ が2つの解をもつような実数 k の値の範囲は $\boxed{(2)}$ である。

(ii) m, n は自然数で，$m < n$ とする。集合

$$M = \{x \mid m < x < n \text{ かつ } x \text{ は } 20 \text{ を分母とする既約分数}\}$$

の要素の個数は $\boxed{(3)}$ であり，M の要素の総和は $\boxed{(4)}$ である。

解答

① $0 \leqq t < \dfrac{1}{2}$ または $t = 1$　② $1 < k < 3$, $\dfrac{7}{2} < k < \dfrac{11}{3}$　③ $8(n-m)$　④ $4(n+m)(n-m)$

解説

(i) (1) $y = \sin x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{5\pi}{6}\right)$ のグラフと直線 $y = t$ のグラフの共有点が1つであるような t の範囲を求めればよいので，求める t の値の範囲は $\boldsymbol{0 \leqq t < \dfrac{1}{2}}$ **または** $\boldsymbol{t = 1}$.（図1参照）

(2)

$$\begin{aligned} 3\cos 2x + 4\sin x - k = 0 \ \cdots ① \quad &\Longleftrightarrow \quad 3(1 - 2\sin^2 x) + 4\sin x - k = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -6t^2 + 4t + 3 = k \ \cdots ② \end{aligned}$$

であるから，直線 $y = k$ と放物線 $y = -6t^2 + 4t + 3 = -6\left(t - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{11}{3}$ のグラフで考える．ここで，$0 \leqq t < \dfrac{1}{2}$ または $t = 1$ の t の値に対して対応する x の値は1個，$\dfrac{1}{2} \leqq t < 1$ の t の値に対して対応する x の値は2個であることに注意して図2を参照しながら考えると，

- $k < 1$ のときは②に解がないので①の解は0個
- $k = 1$ のときは②の解が $t = 1$ なので ①の解は $x = \dfrac{\pi}{2}$ の1個
- $1 < k < 3$ のときは②は $\dfrac{2}{3} < t < 1$ に1つだけ解をもつので ①の解は2個
- $3 \leqq k \leqq \dfrac{7}{2}$ のときは②は $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}$ に1つずつ解をもつので ①の解は3個
- $\dfrac{7}{2} < k < \dfrac{11}{3}$ のときは②は $\dfrac{1}{6} < t < \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{3} < t < \dfrac{1}{2}$ に1つずつ解をもつので ①の解は2個
- $k = \dfrac{11}{3}$ のときは ② は $t = \dfrac{1}{3}$ を解にもつので①の解は1個

- $k > \dfrac{11}{3}$ のときは ② に解がないので①の解は 0 個

であることがわかるので, ①の解が 2 つであるような k の値の範囲は $\boldsymbol{1 < k < 3,\ \dfrac{7}{2} < k < \dfrac{11}{3}}$ である.

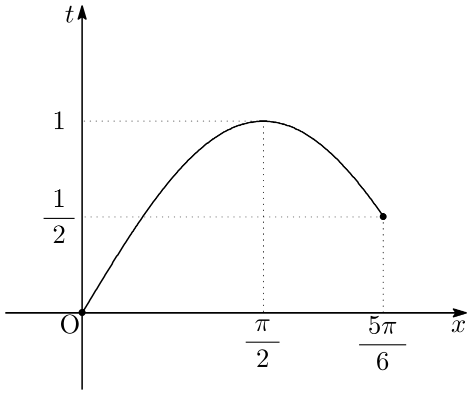


図 1

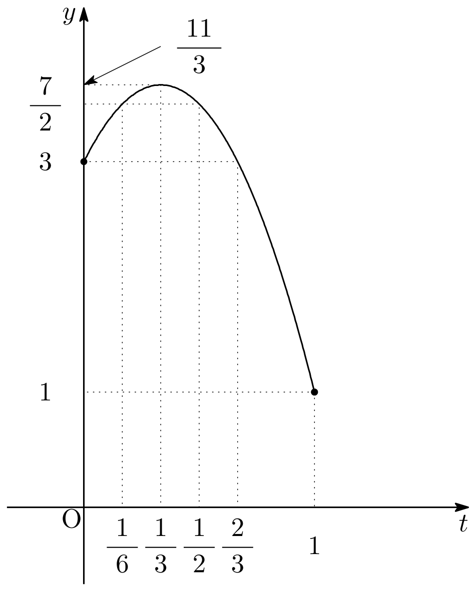


図 2

(ii) (3) M の要素を並べると次のようになる.

$$\begin{array}{cccccccc}
m+\frac{1}{20} & m+\frac{3}{20} & m+\frac{7}{20} & m+\frac{9}{20} & m+\frac{11}{20} & m+\frac{13}{20} & m+\frac{17}{20} & m+\frac{19}{20} \\
m+1+\frac{1}{20} & m+1+\frac{3}{20} & m+1+\frac{7}{20} & m+1+\frac{9}{20} & m+1+\frac{11}{20} & m+1+\frac{13}{20} & m+1+\frac{17}{20} & m+1+\frac{19}{20} \\
m+2+\frac{1}{20} & m+2+\frac{3}{20} & m+2+\frac{7}{20} & m+2+\frac{9}{20} & m+2+\frac{11}{20} & m+2+\frac{13}{20} & m+2+\frac{17}{20} & m+2+\frac{19}{20} \\
\vdots & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & \\
n-1+\frac{1}{20} & n-1+\frac{3}{20} & n-1+\frac{7}{20} & n-1+\frac{9}{20} & n-1+\frac{11}{20} & n-1+\frac{13}{20} & n-1+\frac{17}{20} & n-1+\frac{19}{20}
\end{array}$$

各行は 8 個の数からなり，それが $(n-m)$ 行あるので， M の要素の個数は $\boldsymbol{8(n-m)}$ である.

(4) 上記の並べ方において,

1 行目の総和は $8m+4$
2 行目の総和は $8(m+1)+4$
$\vdots$
$(n-m)$ 行目の総和は $8(n-1)+4$

であることがわかるので, 求める総和は $8\cdot\dfrac{n-m}{2}\{m+(n-1)\}+4(n-m) = \boldsymbol{4(n+m)(n-m)}$ となる.

[III]　（記述問題）

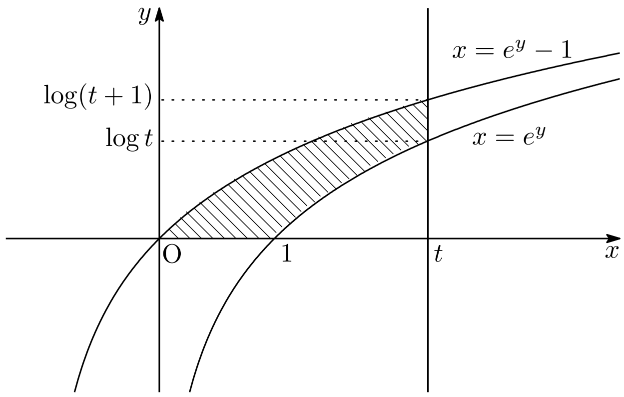
曲線 $C_1 : y = \log x$ および $C_2 : y = \log(x+1)$ について，次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(i) 原点 $(0,\ 0)$ と $(1,\ 0)$ を結ぶ線分，曲線 C_1，曲線 C_2 および $x = t$（ただし $t > 1$）で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 $V(t)$ を求めよ。

(ii) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} V'(t)$ を求めよ。ただし，$V'(t) = \dfrac{d}{dt}V(t)$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

(i)　$C_1 : x = e^y$，$C_2 : x = e^y - 1$ であり，囲まれた部分を図示すると右の通りである．求める体積 $V(t)$ は，



$$\begin{aligned}
V(t) &= \int_0^{\log t} \pi e^{2y}\,dy + \pi t^2\bigl(\log(t+1) - \log t\bigr) - \int_0^{\log(t+1)} \pi(e^y - 1)^2\,dy \\
&= \pi\left\{\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^{\log t} + t^2\log(t+1) - t^2\log t - \left[\frac{e^{2y}}{2} - 2e^y + y\right]_0^{\log(t+1)}\right\} \\
&= \pi\left\{\frac{t^2-1}{2} + t^2\log(t+1) - t^2\log t - \frac{(t+1)^2}{2} + 2(t+1) - \log(t+1) - \frac{3}{2}\right\} \\
&= \boldsymbol{\pi\left\{t - \frac{1}{2} + (t^2-1)\log(t+1) - t^2\log t\right\}}
\end{aligned}$$

(ii)

$$V'(t) = \pi\left\{1 + 2t\log(t+1) + \frac{t^2-1}{t+1} - 2t\log t - \frac{t^2}{t}\right\} = 2\pi t\log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V'(t) = \boldsymbol{2\pi}.$

講評

［I］ (i)「3 次方程式」 易しい問題だが効率よく解きたい.

(ii)「整数」 最大公約数・最小公倍数の表し方が理解できていれば難しくはないが，苦手とする受験生も多いだろう.

(iii)「場合の数」 (5) はやや易．(6) はよくある設問だが慣れていないと難しい.

［II］ (i)「三角関数」 (1) は平易．(2) は置き換えのある解の個数の議論がやや難しい.

(ii)「整数」 (3) は平易．(4) は書き並べていって規則をつかめば難しくはないのだが，差がつきそうな問題である.

［III］ 「微積分」 ごく普通の回転体の体積の問題であり，微分・積分の計算をていねいにするだけ．とはいえ微分・積分計算は差がつくだろう.

昨年よりやや難化．標準レベルの差がつきやすそうな問題がそろっている．ボーダーは 6 割強.

医歯学部進学予備校 メビオ

〒540-0033 大阪市中央区石町2-3-12 ベルヴォア天満橋

TEL 06-6946-0109 FAX 06-6941-9416

http://www.mebio.co.jp/

MeBio Scholastics