福岡大学医学部 2016年度入学試験 解答速報 数学

2016年2月2日 実施

［I］ 次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i) 2016 の正の約数の中で，偶数であるものの個数は $\boxed{\ (1)\ }$ 個で．これらすべての和は $\boxed{\ (2)\ }$ である。

(ii) a を実数とする。3 次方程式 $x^3+ax+\dfrac{5}{2}=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ の値を a を用いて表すと $\boxed{\ (3)\ }$ である。また，複素平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ に対し，$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角二等辺三角形であるとき，a の値を求めると，$a=$ $\boxed{\ (4)\ }$ である。

(iii) $\triangle\mathrm{ABC}$ 内に点 P があり，直線 BP と辺 AC の交点は辺 AC を $1:2$ に内分し，直線 CP と辺 AB の交点は辺 AB を $2:1$ に内分する。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表すと $(s,\ t)=$ $\boxed{\ (5)\ }$ である。また，$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形のとき，$\cos\angle\mathrm{PAB}=$ $\boxed{\ (6)\ }$ である。

解答

(1) 30

(2) 6448

(3) $-2a$

(4) $\dfrac{3}{2}$

(5) $\left(\dfrac{4}{7},\ \dfrac{1}{7}\right)$

(6) $\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

解説

(i) $2016=2^5\cdot3^2\cdot7=2\cdot(2^4\cdot3^2\cdot7)$ であるから，正の偶数の約数は 2 に $2^4\cdot3^2\cdot7$ の正の約数をかけて得られる．したがって，$2^4\cdot3^2\cdot7$ の正の約数の個数を求めればよいので，$(4+1)(2+1)(1+1)=30$ 個.
また, これらすべての和は $2\times(2^4\cdot3^2\cdot7$ の正の約数の和$)=2(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)(1+7)=6448$

(ii) 3 次方程式の解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\cdots①\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a\cdots②\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{5}{2}\cdots③\end{cases}$$

であるから，

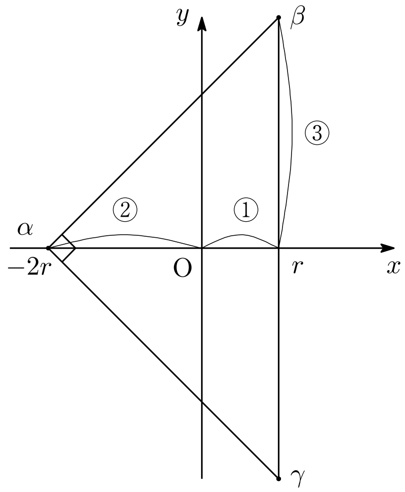
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-2a$$

となる.
次に，$\triangle\mathrm{ABC}$ の複素平面上での 3 頂点の解の配置について考える.
この方程式は実数係数の 3 次方程式であるから，解は実数解 1 個と，互いに共役な 2 つの虚数解である．よって以下では α を実数解，β および γ を 2 つの互いに共役な虚数解とする．このとき $\triangle\mathrm{ABC}$ は $\angle\mathrm{A}$ が直角の実軸に関して対称な直角二等辺三角形となる.

また，$\gamma = \overline{\beta}$ に注意すると，③ より $\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\overline{\beta} = \alpha|\beta|^2 = -\dfrac{5}{2}$ であり，$|\beta|^2 > 0$ であるから実数解 α は負の数であることもわかり，さらに ① $\iff \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 0$ であるからこの三角形の重心は原点であることもわかる．以上により複素平面上で解の配置は下図のようになるので，3 つの解は r を正の実数として $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (-2r,\ r+3ri,\ r-3ri)$ とおくことができる．
よってこれらを ②, ③ に代入すると，

$$\begin{cases} (-2r)(r+3ri)+(r+3ri)(r-3ri)+(r-3ri)(-2r) = a \\ (-2r)(r+3ri)(r-3ri) = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 6r^2 = a \\ -20r^3 = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

となるので，これを解いて $a = \dfrac{3}{2}$ を得る．



(iii) 直線 BP と辺 AC の交点を D，また直線 CP と辺 AB の交点を E とする．メネラウスの定理から，$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}} \cdot \dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PD}} \cdot \dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CA}} = 1$ より $\dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PD}} \cdot \dfrac{2}{3} = 1$．したがって $\mathrm{BP} : \mathrm{PD} = 3 : 4$ が分かり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{7} = \dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}$ となる．また $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{5}{7} \cdot \dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$ より，直線 AP と BC の交点を F とすると，$\mathrm{BF} : \mathrm{FC} = 1 : 4$ が分かる．正三角形の 1 辺の長さを 5 とすると，余弦定理により $\mathrm{AF}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BF}^2 - 2\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BF} \cos 60^\circ = 25 + 1 - 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} = 21$．したがって，再び余弦定理より $\cos\angle\mathrm{PAB} = \cos\angle\mathrm{FAB} = \dfrac{5^2 + 21 - 1^2}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{21}} = \dfrac{3\sqrt{21}}{14}$．

［**II**］ 次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i) 不等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}-6\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}+32\leqq 0$ を解くと $\boxed{\ (1)\ }$ である。

また，$\left(\dfrac{1}{24}\right)^{15}$ は小数第 $\boxed{\ (2)\ }$ 位にはじめて 0 でない数字が現れる。

ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(ii) 平均値と中央値は共に代表値であり，求め方は全く異なるが比較的近い値であることが多い。いま，偶数個の身長のデータがあり，その最小値は $m=140$ cm，最大値は $M=180$ cm である。このデータの中央値が $A=150$ cm のとき，半数のデータは m 以上 A 以下の値であり，残る半数のデータは A 以上 M 以下である。このことから平均値 $\overline{x}$ のとる値の範囲は $\boxed{\ (3)\ }$ である。また，平均値と中央値の関係を用いると，最小値が $m=140$ cm，最大値が $M=180$ cm である偶数個のデータの平均値が $\overline{x}=170$ cm であるとき，中央値 A の取る値の範囲は $\boxed{\ (4)\ }$ である。

解答

(1) $-3\leqq x\leqq -2$

(2) 21

(3) $145<\overline{x}<165$

(4) $160<A\leqq 180$

解説

(i) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}=t$ とおくと，与不等式から $t^2-12t+32\leqq 0$ となる．$(t-4)(t-8)\leqq 0$ より $4\leqq t\leqq 8$ なので，$2^2\leqq 2^{-x}\leqq 2^3$ から $-3\leqq x\leqq -2$.

$\log_{10}\left(\dfrac{1}{24}\right)^{15}=-15\log_{10}(2^3\cdot 3)=-15(3\log_{10}2+\log_{10}3)=-15(0.9030+0.4771)=-20.7015$

であるから，$10^{-21}\leqq\left(\dfrac{1}{24}\right)^{15}<10^{-20}$ と分かるので，はじめて 0 以外の数字が現れるのは小数第 21 位である．

(ii) データの個数を $2n$ 個とし，データを小さい順に並べたものを x_1，x_2，$\cdots$，x_{2n} とする．いまの場合，

$$m=x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n\leqq A\leqq x_{n+1}\leqq\cdots\leqq x_{2n}=M$$

であり，$x_n+x_{n+1}=2A$ も成り立っている．この場合

$$(n-1)m+x_n+(n-1)x_{n+1}+M\leqq\sum_{k=1}^{2n}x_k\leqq m+(n-1)x_n+x_{n+1}+(n-1)M$$

であるが

$$\begin{aligned}&x_n+(n-1)x_{n+1}=2A+(n-2)x_{n+1}\geqq 2A+(n-2)A=nA,\\&(n-1)x_n+x_{n+1}=2A+(n-2)x_n\leqq 2A+(n-2)A=nA\end{aligned}$$

より，$n(m+A)+(M-m)\leqq\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}x_k\leqq n(M+A)-(M-m)$ が成り立つ．この評価は最良である．

実際に最小値は

$$\begin{array}{rllllllll} & (x_1, & x_2, & \cdots, x_{n-1}, & x_n, & x_{n+1}, & x_{n+2}, & \cdots x_{2n-1}, & x_{2n} \quad) \\ = & (m, & m, & \cdots, m, & A, & A, & A, & \cdots, A, & M \quad) \end{array}$$

のときに実現され，この場合平均は $\overline{x}=\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}x_k=\dfrac{(n-1)m+nA+M}{2n}=\dfrac{m+A}{2}+\dfrac{M-m}{2n}$ となる．また，最大値は

$$\begin{array}{rllllllll} & (x_1, & x_2, & \cdots, x_{n-1}, & x_n, & x_{n+1}, & x_{n+2}, & \cdots x_{2n-1}, & x_{2n} \quad) \\ = & (m, & A, & \cdots, A, & A, & A, & M, & \cdots, M, & M \quad) \end{array}$$

のときに実現され，この場合平均は $\overline{x}=\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}x_k=\dfrac{m+nA+(n-1)M}{2n}=\dfrac{A+M}{2}-\dfrac{M-m}{2n}$ となる．

各 x_k は連続に変化するので，$\overline{x}$ は最小値と最大値の間のすべての実数値を実現する，つまり $\overline{x}$ の取り得る値は（n を固定すると）閉区間 $\left[\dfrac{m+A}{2}+\dfrac{M-m}{2n},\ \dfrac{A+M}{2}-\dfrac{M-m}{2n}\right]$ である．$n\to\infty$ を考えると開区間 $\left(\dfrac{m+A}{2},\ \dfrac{A+M}{2}\right)$ が得られる．後は数値を代入して $\dfrac{140+150}{2}<\overline{x}<\dfrac{180+150}{2}$，すなわち $145<\overline{x}<165$ を得る．

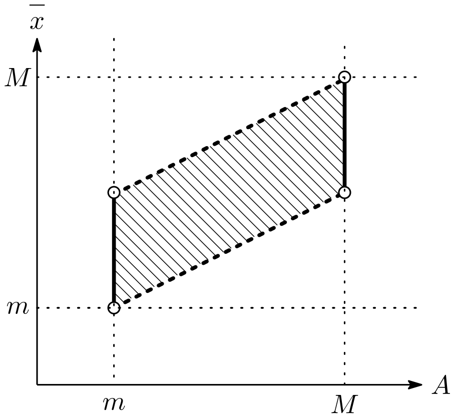
(4) については，$\dfrac{m+A}{2}+\dfrac{M-m}{2n}\leqq\overline{x}\leqq\dfrac{A+M}{2}-\dfrac{M-m}{2n}$ を変形して

$$2\overline{x}-M+\frac{M-m}{n}\leqq A\leqq 2\overline{x}-m-\frac{M-n}{n}$$

を得るが，$m\leqq A\leqq M$ を満たさないといけないので，A が実際に取り得る範囲は

$$\mathrm{Max}\left\{2\overline{x}-M+\frac{M-m}{n},\ m\right\}\leqq A\leqq \min\left\{2\overline{x}-m-\frac{M-n}{n},\ M\right\}$$

ということになる．（図を参照のこと．A を固定したときの $\overline{x}$ の範囲から領域を作成し，それを横に切って固定した $\overline{x}$ に対する A の範囲を読むのである．）



これに数値を代入して $160+\dfrac{40}{n}\leqq A\leqq 180$ を得る．$n\to\infty$ を考えると $160<A\leqq 180$ がわかる．

［III］　（記述問題）

$f(x) = (x-1)\sqrt{-x^2+4x-3} \quad (1 \leqq x \leqq 3)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(i) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ。

(ii) 曲線 $y = f(x)$ と，2 直線 $x = 1$，$y = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ とで囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{-x^2+4x-3} + (x-1)\frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x-3}} \\ &= \frac{(-x^2+4x-3)+(x-1)(-x+2)}{\sqrt{-x^2+4x-3}} \\ &= \frac{-2x^2+7x-5}{\sqrt{-x^2+4x-3}} \\ &= \frac{-(x-1)(2x-5)}{\sqrt{-x^2+4x-3}} \end{aligned}$$

となるので，増減表は次の通りである．

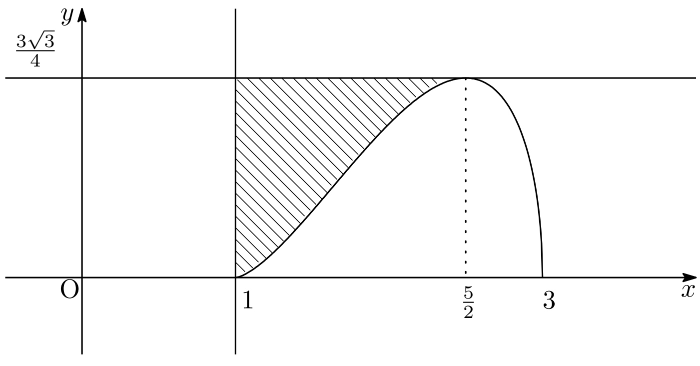
x	1	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$	3
$f'(x)$	＼	$+$	0	$-$	＼
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

以上より，$x = \dfrac{5}{2}$ のとき極大値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$.

(ii) 求める面積を S とすると，

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{5}{2} - 1\right) - \int_1^{\frac{5}{2}} f(x)\,dx$$

である．ここで，$\displaystyle\int_1^{\frac{5}{2}} f(x)\,dx$ について，



$$
\begin{aligned}
\int_1^{\frac{5}{2}} f(x)\,dx &= \int_1^{\frac{5}{2}} (x-1)\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin\theta+1)\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta \qquad \text{（ここで } x-2=\sin\theta \text{ とおいた）} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin\theta+1)\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta)\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin\theta\cos^2\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \\
&= \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \left(-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

したがって，$S=\boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{3}}{8}-\dfrac{\pi}{3}}$.

講評

［I］ (i) （整数） 基本的な問題.

(ii) （複素数） (3) は基本的な問題だが，(4) が難しい.
解の配置を複素数平面上で図形的にイメージできないと大変.

(iii) （平面ベクトル） 基本的な問題.

［II］ (i) （指数・対数） 基本的な問題.

(ii) （データの分析） やや難．感覚的に正解を得ることもできるが，厳密に考えるのはかなり難しい.

［III］ （微積分） 微分・積分の計算をていねいにするだけ．とはいえ (ii) の積分計算は差がつくだろう.

［Ｉ］,［Ⅱ］は難易の差がはっきりしており，易問に関してはどれも落としたくないところ.
［Ｉ］(ii),［Ⅱ］(ii) を突破できるか，［Ⅲ］をしっかり完答できるかどうかが合否を分けるだろう．ボーダーラインは 7 割前後.