福岡大学医学部 2015年度入学試験 解答速報 数学

2015年2月2日 実施

［I］ 次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i) θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くとき，$t = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ のとりうる値の範囲は $\boxed{(1)}$ であり，また，$K = 2\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta + 2\cos\theta - 5$ のとりうる値の範囲は $\boxed{(2)}$ である。

(ii) 曲線 $y = e^{-x^2}$ 上の 3 点 P(0, 1)，Q$(t,\ e^{-t^2})$，R$(-t,\ e^{-t^2})$ を通る円を C とする。円 C の半径 r を t の関数として $r(t)$ と表すと，$r(t) = \boxed{(3)}$ である。また，極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0} r(t)$ の値は $\boxed{(4)}$ である。ただし e は自然対数の底である。

(iii) 3 辺 OA，OB，OC が互いに直交する四面体 OABC において，△ABC の重心を G，辺 OB を 3 : 2 に内分する点を M，辺 OC を 1 : 4 に内分する点を N とする。また，△AMN と直径 OG との交点を P とする。このとき，OP と OG の比を求めると，OP : OG $= \boxed{(5)}$ である。さらに，AP ⊥ MN のとき OB : OC $= \boxed{(6)}$ である。

解答

(1) $-1 \leqq t \leqq 2$

(2) $-7 \leqq K \leqq 2$

(3) $\dfrac{t^2}{2(1-e^{-t^2})} + \dfrac{1-e^{-t^2}}{2}$

(4) $\dfrac{1}{2}$

(5) $9 : 23$

(6) $1 : \sqrt{3}$

解説

(i) $t = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$ より t の取りうる値の範囲は $-1 \leqq t \leqq 2$ となる．また，

$$t^2 = 3\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta = 2\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 1$$

であるから，$K = (t^2-1) + 2t - 5 = t^2 + 2t - 6 = (t+1)^2 - 7$ である．

したがって，$-1 \leqq t \leqq 2$ に注意すると $-7 \leqq K \leqq 2$ となる．

(ii) 線分 PQ の垂直 2 等分線と y 軸との交点が円の中心になる．

垂直 2 等分線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{t}{e^{-t^2}-1}\left(x - \frac{t}{2}\right) + \frac{e^{-t^2}+1}{2} \\ &= -\frac{t}{e^{-t^2}-1}\cdot x + \frac{t^2}{2(e^{-t^2}-1)} + \frac{e^{-t^2}+1}{2} \end{aligned}$$

半径は，この直線の y 切片と (0, 1) との距離なので，

$$r(t) = 1 - \frac{t^2}{2(e^{-t^2}-1)} - \frac{e^{-t^2}+1}{2} = \frac{t^2}{2(1-e^{-t^2})} + \frac{1-e^{-t^2}}{2}$$

となる．公式 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$ を利用することにより，

$$\lim_{t\to0}r(t)=\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-t^2}{e^{-t^2}-1}+\frac{1-e^{-t^2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

(iii) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．

P は平面 AMN 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OM}}+n\overrightarrow{\mathrm{ON}}\quad(l+m+n=1)$ と表せる．

これを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=l\vec{a}+\dfrac{3}{5}m\vec{b}+\dfrac{1}{5}n\vec{c}$．

また P は直線 OG 上の点なので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ とおける．

ここで $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，2 式を係数比較すると，

$$\begin{cases} l=\dfrac{k}{3} \\ \dfrac{3}{5}m=\dfrac{k}{3} \\ \dfrac{1}{5}n=\dfrac{k}{3} \\ l+m+n=1 \end{cases}$$

が成り立ち，これを解くと $k=\dfrac{9}{23}$．よって $\mathrm{OP}:\mathrm{OG}=9:23$ となる．

上の結果より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{23}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$．

これより $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\dfrac{1}{23}(20\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=-\dfrac{1}{5}(3\vec{b}-\vec{c})$ となる．

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=0$ を計算すると $9|\vec{b}|^2-3|\vec{c}|^2=0$ が得られるので，$\mathrm{OB}:\mathrm{OC}=1:\sqrt{3}$ である．

[II] 次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i) $a=\log_2 3,\ b=\log_2 5$ とする。このとき $2^{-2a+b+1}$ と 2^{2a-3} の値を求めると $(2^{-2a+b+1},\ 2^{2a-3})=$ $\boxed{(1)}$ である。さらに，$a=\log_2 3>1.584,\ b=\log_2 5<2.332$ であることを用いて，$2^{0.16}$ の値を小数第 1 位まで求めると $2^{0.16}=$ $\boxed{(2)}$ である。

(ii) 単位円周上の $2n$ 個の点 $\mathrm{P}_k\left(\cos\dfrac{k}{n}\pi,\ \sin\dfrac{k}{n}\pi\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n-1)$ を頂点とする正 $2n$ 角形がある。この $2n$ 個の点 $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{2n-1}$ から 4 点を選び，順に結んで 4 角形を作るとき，4 つの角がすべて直角である 4 角形は $\boxed{(3)}$ 通りある。また，4 つの角がどれも直角でない 4 角形は $\boxed{(4)}$ 通りある。ただし $n\geqq 3$ である。

解答

(1) $\left(\dfrac{10}{9},\ \dfrac{9}{8}\right)$

(2) 1.1

(3) $\dfrac{n(n-1)}{2}$

(4) $\dfrac{1}{3}n(n-1)(n-2)(2n-3)$

解説

(i) $2^a=3,\ 2^b=5$ である．従って，$a^{-2a+b+1}=(2^a)^{-2}\cdot 2^b\cdot 2=\dfrac{10}{9}$，$2^{2a-3}=(2^a)^2\cdot 2^{-3}=\dfrac{9}{8}$.

また与不等式から，

$-2a+b+1<-2\cdot 1.584+2.322+1=0.154$ および $2a-3>2\cdot 1.584-3=0.168$ が得られる．

従って $-2a+b+1<0.154<0.16<0.168<2a-3$ となるので，$2^{-2a+b+1}<2^{0.16}<2^{2a-3}$ となる．

$2^{-2a+b+1}=\dfrac{10}{9}=1.11\cdots$，$2^{2a-3}=\dfrac{9}{8}=1.125$ であるから答は 1.1 となる．

(ii) 4 つの角をそれぞれ円周角とみれば，対応する弦は 4 角形の対角線となる．従って，4 つの角がすべて直角である 4 角形となるには，その対角線が 2 本とも単位円の直径であればよい．

$\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{2n-1}$ から選んだ 2 点が円の直径となるのは n 通りなので直径は n 本ある．従って，4 つの角がすべて直角である 4 角形の総数は，n 本の直径から 2 本を選ぶ組合せに等しいので ${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 通りある．

また，4 つの角がどれも直角でない 4 角形は次のように考える．まず 4 角形の総数は，$2n$ 個の頂点から 4 点を選ぶ組合せの総数に等しいので ${}_{2n}\mathrm{C}_4=\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)(2n-3)$ である．これから，以下のものをのぞけばよい．

① 対角線が 2 本とも直径となるもの.

これは (3) の答の $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 通りである.

② 対角線が 1 本だけ直径となるもの.

直径を 1 本固定する．残りの 2 点はその直径について反対側にあるように取らなければならない（同じ側に取ってしまうと 4 つの角がすべて直角でない 4 角形となってしまう）．このような 2 点の選び方は $(n-1)^2$ 通り．このうち，2 点を結んだ線分が直径となるもの

($n-1$ 通り) は除かなければならない．従って，対角線が 1 本だけ直径となるものの総数は $n\{(n-1)^2-(n-1)\}=n(n-1)(n-2)$ 通りである．

以上から，4 つの角がどれも直角でない 4 角形の総数は，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)(2n-3)-\frac{n(n-1)}{2}-n(n-1)(n-2)\\=&\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)(2n-3)\text{ 通り}\end{aligned}$$

である．

［III］ （記述問題）

関数 $f(x)=\log(1+\sqrt{2+x})-\dfrac{1}{2}\sqrt{2+x}$ について，次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(i) 関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。

(ii) 曲線 $y=f(x)$ および直線 $y=\dfrac{\log 3-1}{4}x+\dfrac{\log 3-1}{2}$ とで囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

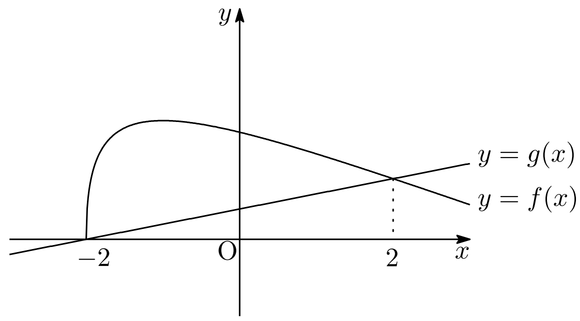
(i)

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{1}{2(1+\sqrt{2+x})\sqrt{2+x}}-\frac{1}{4\sqrt{2+x}}\\
&=\frac{1}{4\sqrt{2+x}}\left(\frac{2}{1+\sqrt{2+x}}-1\right)\\
&=\frac{2-(1+\sqrt{2+x})}{4\sqrt{2+x}(1+\sqrt{2+x})}\\
&=\frac{1-\sqrt{2+x}}{4\sqrt{2+x}(1+\sqrt{2+x})}
\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ のとき $\sqrt{2+x}=1$ より $x=-1$．増減表は次の通りである．

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\log 2-\dfrac{1}{2}$	$\searrow$

以上より，$x=-1$ のとき極大値 $\mathbf{\log 2-\dfrac{1}{2}}$.



(ii) $g(x)=\dfrac{\log 3-1}{4}x+\dfrac{\log 3-1}{2}$ とおくと，

$f(-2)=g(-2)=0$，$f(2)=g(2)=\log 3-1$ であることと，(1) で調べた $f(x)$ の増減より，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは右図のようになる．

求める面積を S とおくと，

$$\begin{aligned}
S&=\int_{-2}^{2}f(x)\,dx-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(\log 3-1)\\
&=\int_{-2}^{2}\left(\log(1+\sqrt{2+x})-\frac{1}{2}\sqrt{2+x}\right)dx-2\log 3+2
\end{aligned}$$

である．

$t=\sqrt{2+x}$ とおくと，$t^2=2+x$ より $2t\,dt=dx$，

x	-2	$\to$	2
t	0	$\to$	2

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \log(1+\sqrt{2+x})\,dx &= \int_{0}^{2} \log(1+t)\cdot 2t\,dt \\
&= \Big[t^2\log(1+t)\Big]_0^2 - \int_0^2 \frac{t^2}{1+t}\,dt \\
&= 4\log 3 - \int_0^2 \left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt \\
&= 4\log 3 - \left[\frac{t^2}{2} - t + \log|1+t|\right]_0^2 \\
&= 3\log 3
\end{aligned}
$$

である．また，

$$
\int_{-2}^{2} \frac{1}{2}\sqrt{2+x}\,dx = \left[\frac{1}{3}(2+x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{3}\cdot(8-0) = \frac{8}{3}
$$

となるので，

$$
S = 3\log 3 - \frac{8}{3} - 2\log 3 + 2 = \mathbf{\log 3 - \frac{2}{3}}.
$$

講評

［**I**］　どの問題も平易というわけでもないが，基本事項をしっかり押さえていれば正解ができる問題ばかりである．ここでしっかり満点を取れるかどうかが勝負の分かれ目．

［**II**］　(i) は指数対数を利用して値を評価する問題．桁数問題と同様な処理をしていくことになるが，(2) で戸惑った受験生は多いだろう．ただ空所補充形式なので，よく分からないながらも (1) で出した 2 つの値の間だろうと見当をつけて答を書くくらいの図太さは欲しい．
(ii) は場合の数と図形の融合題．単位円の直径に注目すればよいが，これに気づけないと正解を出すのは苦しいだろう．また (4) はかなり慎重に考えねばならず，正解者は非常に少ないと予想する．

［**III**］　(i) は確実に正解したい．(ii) は，$y=f(x)$ と直線の交点を求めるのが x に値を代入して探すしかないと気づけるかどうかがポイント．交点を求めることができて積分計算ができれば大きくリードすることができるが，正解まで導けた受験生は少ないであろう．

　ここ数年と比べて大きく難化．できなかったと落胆した受験生は多いのではないか．［I］を確実に正解，［II］と［III］は半分得点するくらいが目安．ボーダーラインは 7 割弱．