大阪医科大学 2018年度（後期）入学試験 解答速報 数学

2018年3月10日 実施

〔1〕 中心が原点 O，半径が 2 の球面を S とする。S 上の 4 点

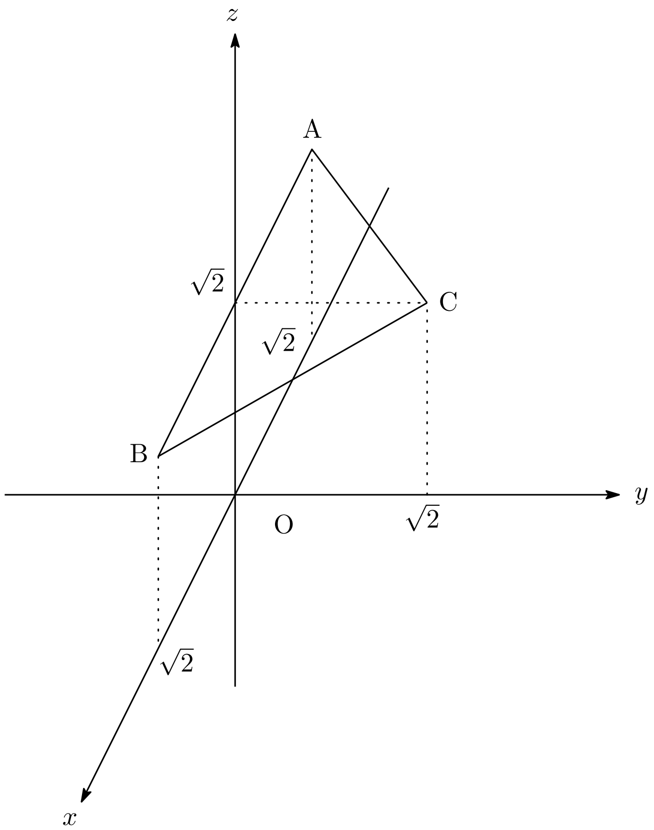
$$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}),\ \mathrm{B}(\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}),\ \mathrm{C}(0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{2}),\ \mathrm{D}(p,\ q,\ r)$$

を頂点とする四面体 ABCD を考える。

(1) $\angle\mathrm{ABD}$ が直角のとき p の値を求めよ。

(2) (1) の条件が成り立ち，さらに四面体 ABCD の体積が $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，点 D の座標を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$



(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-2\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(p-\sqrt{2},\ q,\ r-\sqrt{2})$ より，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=-2\sqrt{2}(p-\sqrt{2})$.
これが 0 になればよいので，$p=\boldsymbol{\sqrt{2}}$.

(2) 点 D が球面 S 上にあるので，$p^2+q^2+r^2=4$．これと (1) より，$q^2+r^2=2\ \cdots\cdots$ ①.
また，三角形 ABC の面積は 2 である．3 点 A，B，C の z 座標はすべて $\sqrt{2}$ なので，三角形 ABC を含む平面 $z=\sqrt{2}$ と点 D との距離は $|r-\sqrt{2}|$ である．よって，四面体の体積より，

$$\frac{1}{3}\cdot 2\cdot|r-\sqrt{2}|=\frac{2\sqrt{2}}{3}\iff|r-\sqrt{2}|=\sqrt{2}\ \cdots\cdots\ ②$$

①と②を連立して解くことにより，$(q,\ r)=(\pm\sqrt{2},\ 0)$ となるので，求める点 D の座標は $\boldsymbol{(\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2},\ 0)}$ である.

〔2〕 $\triangle$ABC の辺 AB 上の点 P と辺 AC 上の点 Q について，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}}=x$, $\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AC}}=y$ とする。直線 PQ は $\triangle$ABC の重心 G を通るとする。

(1) x, y の満たす関係式を求め，x がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 面積の比の値 $\dfrac{\triangle\mathrm{APQ}}{\triangle\mathrm{ABC}}$ がとりうる範囲を求めよ。

解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$ である（「辺 AB 上, AC 上」は端点も含むと解釈した）. 直線 PQ 上に G があることから,

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+s\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-s)x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+sy\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とおける. また $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は一次独立であるから，係数比較により $(1-s)x=\dfrac{1}{3}$, $sy=\dfrac{1}{3}$ となる. $x=0$, $y=0$ はこの式を満たさないので $x\fallingdotseq 0$, $y\fallingdotseq 0$ であるから，$1-s=\dfrac{1}{3x}$, $s=\dfrac{1}{3y}$. これらを辺々足して整理すると，$\boldsymbol{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3}$.

これより $\dfrac{1}{y}=3-\dfrac{1}{x}$ となる. ここまでの議論から $0<y\leqq 1$ であるから，$\dfrac{1}{y}=3-\dfrac{1}{x}\geqq 1$ より $\dfrac{1}{x}\leqq 2$ となる. $0<x\leqq 1$ も考慮すると，x のとりうる値の範囲は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1}$.

(注；図を描いて点 P, Q の動きを考えると，x の範囲は容易に想像出来る)

(2) $\dfrac{\triangle\mathrm{APQ}}{\triangle\mathrm{ABC}}=xy$ である. (1) の s を用いると,

$$\frac{1}{xy}=3(1-s)\cdot 3s=-9\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

となる. また $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ から $\dfrac{1}{3}\leqq s=1-\dfrac{1}{3x}\leqq\dfrac{2}{3}$ も分かるので，$2\leqq\dfrac{1}{xy}\leqq\dfrac{9}{4}$ となるから，$\dfrac{4}{9}\leqq xy\leqq\dfrac{1}{2}$. 従って，$\boldsymbol{\dfrac{4}{9}\leqq\dfrac{\triangle\mathrm{APQ}}{\triangle\mathrm{ABC}}\leqq\dfrac{1}{2}}$.

〔3〕 $m,\ n$ を自然数とする。

(1) 2^n+1 が平方数となるような n をすべて求めよ。ただし平方数とは自然数の 2 乗で表される整数のことである。

(2) $m=nk$ (k は奇数) とする。このとき，2^m+1 は 2^n+1 で割り切れることを示せ。

解答

(1) $2^n+1=N^2$ (N : 自然数) とおける．ここで $2^n=(N-1)(N+1)$ と因数分解できるから，$(N-1,\ N+1)=(2^i,\ 2^j)$ ($i,\ j$ は 0 以上の整数) と書けるが，$2^j-2^i=2$ を満たすものは $(i,\ j)=(1,\ 2)$ しか無いことは明らか．

従って $N=3$ となり，$n=\mathbf{3}$ を得る．

(2) $f(x)=x^k+1$ とすると $f(-1)=0$ ($\because\ k$: 奇数) より $f(x)$ は $x+1$ を因数に持つ．すなわち $f(x)=(x+1)g(x)$ $\left(\text{ただし } g(x)=x^{k-1}-x^{k-2}+\cdots-x+1\right)$ と因数分解できる．

ここで $x=2^n$ とすると $2^{nk}+1=(2^n+1)\times g(2^n)$ となるが，$g(2^n)$ は明らかに整数だから 2^m+1 は 2^n+1 で割り切れる．　(証明終)

〔4〕 関数 $f(x)$, $g(x)$ は微分可能で，連続な導関数 $f'(x)$, $g'(x)$ をもち，次の式を満たすとする。

$$f(x) = g(x) - \int_0^x g'(t)f(t)dt$$

(1) $h(x) = f(x)e^{g(x)}$ とすると，$h'(x) = g'(x)e^{g(x)}$ であることを示せ。

(2) $g(x) = -x^2$ のとき $f(x)$ を求めよ。

(3) $f(x) = -x^2$ のとき $g(x)$ を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

与式の両辺を x で微分することにより，$f'(x) = g'(x) - g'(x)f(x)$ $\cdots$① であることが分かる．
また与式の両辺に $x = 0$ を代入することにより $f(0) = g(0) \cdots$② であることが分かる．

(1) $h'(x) = f'(x)e^{g(x)} + f(x)e^{g(x)}g'(x) = \{f'(x) + g'(x)f(x)\}\, e^{g(x)}$

ここで ① より $f'(x) + g'(x)f(x) = g'(x)$ となるから $h'(x) = g'(x)e^{g(x)}$ である． (証明終)

(2) (1) より $h(x) = e^{g(x)} + C$ (C : 積分定数) が分かる．すなわち $f(x)e^{g(x)} = e^{g(x)} + C$ $\cdots$③ となる．ここで $x = 0$ を ③ の両辺に代入すると $f(0)e^{g(0)} = e^{g(0)} + C$ となるが，② より $f(0) = g(0) = 0$ を用いると $C = -1$ が分かる．

従って $f(x)e^{-x^2} = e^{-x^2} - 1$ となり，$f(x) = \boldsymbol{1 - e^{x^2}}$ を得る．

(3) まず ③ を用いて $f(x)e^{g(x)} = e^{g(x)} - 1$ が分かる．$\left(\because\ \text{②から } f(0) = g(0) = 0\right)$

従って $e^{g(x)} = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ となり，$g(x) = \boldsymbol{-\log\left(x^2 + 1\right)}$ を得る．

〔5〕 ●を記した札が 4 枚，○を記した札が 10 枚ある。これら 14 枚を袋に入れてよくかき混ぜてから 1 枚ずつ取り出して横一列に並べる。この 14 枚の札の並び方において，左端から 7 番目までの 7 枚の札の中に●が丁度 2 個あるという事象を P，どの 2 つの●の間にも 2 個以上の○があるという事象を Q とする。

(1) 4 枚の●と 10 枚の○の計 14 枚の札の，異なる並び方の総数を求めよ。ただし札は，記された●または○以外の区別はできないとする。

(2) P が起こる確率を求めよ。

(3) $P \cap Q$ が起こる確率を求めよ。

解答

(1) $\dfrac{14!}{4!10!} = \dfrac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{1001}$ 通り.

(2) 左端から 7 番目までは● 2 個，○ 5 個が並んでいるので，その並べ方は $\dfrac{7!}{2!5!} = 21$ 通りである. 8 番目から右端までの並べ方も 21 通りであるから P の場合の数は 21×21 であり，求める確率は $\dfrac{21 \times 21}{1001} = \dfrac{\mathbf{63}}{\mathbf{143}}$ である.

(3) 事象 Q の場合の数を考える. どの 2 つの●と●の間にも○が 2 個以上存在するので，●と●の間の 3 カ所から○を 2 個ずつ取り去ることにより，Q を満たす札の並べ方は，単に● 4 個，○ 4 個を並べる並べ方と 1 対 1 に対応することがわかる. 従ってその並べ方は $\dfrac{8!}{4!4!} = 70$ 通り存在する.

ここから P を満たさない並べ方を除かないといけないのだが，Q を満たして P を満たさない並べ方は，左 7 個が●○○●○○●になっていて，右 7 個が○○●○○○○〜○○○○○○●になっている 5 通り，またはその左右反転の計 10 通りであるから，$P \cap Q$ の場合の数は $70 - 10 = 60$ 通りで，その確率は $\dfrac{\mathbf{60}}{\mathbf{1001}}$.

別解

● 2 個，○ 5 個の並べ方のうち，2 つの●の間に 2 個以上の○があるのは右図の 10 通りである.
左 7 個が①, ②, ⑤ である場合，右 7 個は①〜⑩のいずれでもよいが，左 7 個が③, ⑥, ⑧ である場合，右 7 個は⑤〜⑩でなければならない. また，左 7 個が④, ⑦, ⑨, ⑩ である場合，右 7 個は⑧〜⑩でなければならない.

従って $P \cap Q$ の場合の数は $3 \times 10 + 3 \times 6 + 4 \times 3 = 60$ なので，求める確率は $\dfrac{\mathbf{60}}{\mathbf{1001}}$ である.

① ●○○●○○○
② ●○○○●○○
③ ●○○○○●○
④ ●○○○○○●
⑤ ○●○○●○○
⑥ ○●○○○●○
⑦ ○●○○○○●
⑧ ○○●○○●○
⑨ ○○●○○○●
⑩ ○○○●○○●

講評

〔1〕[空間座標]（やや易）易しい．この問題は是非完答したい．

〔2〕[三角形]（標準）標準的な内容．(2) はいろいろな解法が考えられる．

〔3〕[整数]（やや難）(1) は曖昧な議論にならないようにしたい．(2) は差がつくだろう．

〔4〕[数Ⅲ積分]（やや難）定番の問題でありながら，ひとひねり加わっており，力の差が出やすい．

〔5〕[確率]（やや難）単に数え上げることさえできれば正解に到ることが出来る．とは言え，差が付きやすい．

昨年度に比べて易化した．〔1〕,〔2〕を完答して，残りを半答以上で仕上げていきたい．目標は 75%
.