大阪医科大学 2017年度（前期）入学試験 解答速報 数学

2017年2月11日 実施

〔1〕 $f(t)=t^3-t,\ g(t)=e^{-t^2}$ として，座標平面上の曲線 C を $x=f(t),\ y=g(t)$ によって定義する。

(1) t の異なる 2 個以上の値が C 上の同じ点に対応するような点の座標を求め，それぞれの t の値において $\dfrac{dy}{dx}$ の値を求めよ。

(2) C の接線が x 軸または y 軸に平行となるような点の $t,\ x,\ y$ の値を求めよ。

(3) (2) で求めた t の値で区切られた区間での C の接線の傾きの正負を求めよ。

(4) (1)，(2)，(3) の結果を参考にして C のグラフの概形を描け（変曲点を調べる必要はない）。なお，$\dfrac{1}{e}\fallingdotseq 0.37,\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}\fallingdotseq 0.72,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\fallingdotseq 0.58,\ \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\fallingdotseq 0.38$ を参考にしても良い。

解答

(1) $t=t_1,\ t_2$ （ただし $t_1<t_2$）において C 上の同じ点に対応するとすると，

$$\begin{cases} f(t_1)=f(t_2) \\ g(t_1)=g(t_2) \end{cases} \iff \begin{cases} {t_1}^3-t_1={t_2}^3-t_2 & \cdots ① \\ e^{-{t_1}^2}=e^{-{t_2}^2} & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ．②より $-{t_1}^2=-{t_2}^2$ から $t_1=-t_2$．これを①に代入して

$$-{t_2}^3+t_2={t_2}^3-t_2 \iff 2t_2(t_2+1)(t_2-1)=0$$

したがって，$(t_1,\ t_2)=(-1,\ 1)$．対応する点の座標は $\boldsymbol{\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right)}$.

また，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}=\dfrac{-2te^{-t^2}}{3t^2-1}$ より，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=-1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{e}}$

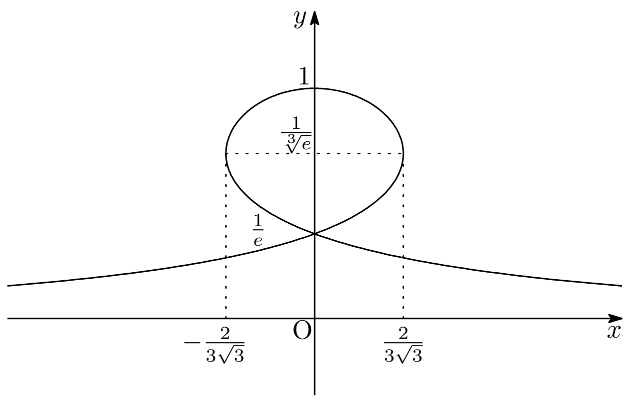
(2) x 軸に平行となるとき，$g'(t)=-2te^{-t^2}=0$ を解くことにより，$\boldsymbol{(t,\ x,\ y)=(0,\ 0,\ 1)}$

y 軸に平行となるとき，$f'(t)=3t^2-1=0$ を解くことにより，

$$\boldsymbol{(t,\ x,\ y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{2}{3\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{2}{3\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)}$$

(3) (1)(2) の議論より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{t<-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}\ \textbf{のとき，傾きは正} \\ \boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<t<0}\ \textbf{のとき，傾きは負} \\ \boldsymbol{0<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}}\ \textbf{のとき，傾きは正} \\ \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}<t}\ \textbf{のとき，傾きは負} \end{cases}$$



(4) (1)〜(3) よりグラフは右上図の通り．

〔2〕 円 $x^2+y^2=1$ に内接する正三角形 $\triangle$ABC と $\triangle$D$'$E$'$F$'$ がある。A, D$'$ の座標はそれぞれ $(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$ で C, E$'$ の x 座標は正である。空間で，点 D$'$, E$'$, F$'$ をそれぞれ z 軸の正方向に 1 平行移動した点をそれぞれ D, E, F とする。$\triangle$ABC と $\triangle$DEF を底面とし，側面は $\triangle$FAB, $\triangle$FEA など互いに合同な 6 個の二等辺三角形である八面体を K とする。

(1) $0<t<1$ である t に対して，$\triangle$DFB の平面 $z=t$ による切り口の線分の長さを t で表せ。

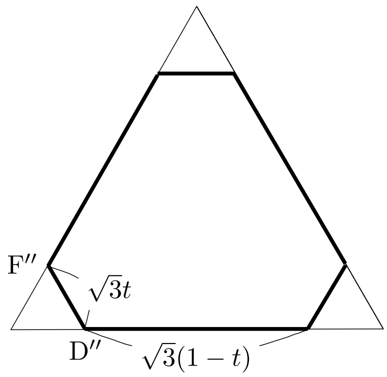
(2) $0<t<1$ である t に対して，K の平面 $z=t$ による切り口の面積を t で表せ。

(3) 八面体 K の体積を求めよ。

解答

(1) $z=t$ と辺 BF,BD の交点をそれぞれ F$''$, D$''$ とすると $\triangle$BFD と $\triangle$BF$''$D$''$ は相似であり，相似比は $1:t$ である．したがって F$''$D$''=t\cdot$FD$=\boldsymbol{\sqrt{3}t}$

(2) (1) と同様に考えると $\triangle$DBC の $z=t$ による切り口の線分の長さは $\sqrt{3}(1-t)$ とわかる．したがって，対称性から切り口は右図のような六角形となる．面積は一辺 $\sqrt{3}t+\sqrt{3}(1-t)+\sqrt{3}t=\sqrt{3}(1+t)$ の正三角形から一辺 $\sqrt{3}t$ の正三角形を 3 枚切り落として考えるとよい．



切り口の面積 $S(t)$ は $S(t)=\dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{3}(1+t)\right\}^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}-3\times\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}t\right)^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1+2t-2t^2)}$.

(3) 体積 $V=\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[t+t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

Webで見る

〔3〕 平面上の $\triangle\mathrm{ABC}$ の三辺の長さを $a=\mathrm{BC},\ b=\mathrm{CA},\ c=\mathrm{AB}$ とし，$\triangle\mathrm{ABC}$ の内心を I とする。

(1) 直線 IA と辺 BC の交点を M とするとき， M は辺 BC を $c:b$ に内分することを示せ。

(2) $a\overrightarrow{\mathrm{IA}}+b\overrightarrow{\mathrm{IB}}+c\overrightarrow{\mathrm{IC}}=\overrightarrow{0}$ であることを示せ。

(3) 平面上の点 P について， $a|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+b|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+c|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$ は，$\mathrm{P}=\mathrm{I}$ において最小となることを示せ。

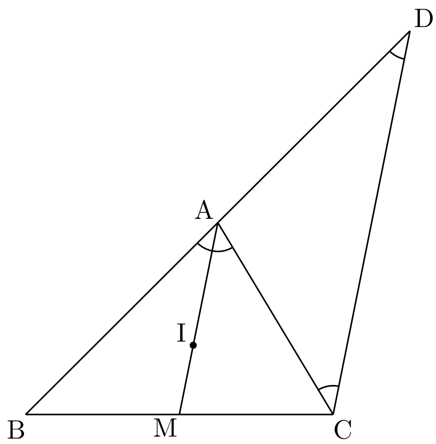
解答

(1) $\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{A}=\theta$ とすると，

$\mathrm{BM}:\mathrm{CM}=\triangle\mathrm{ABM}:\triangle\mathrm{ACM}=\dfrac{1}{2}c\cdot\mathrm{AM}\sin\theta:\dfrac{1}{2}b\cdot\mathrm{AM}\sin\theta=c:b.$ （証明終）

別解

点 C を通り直線 AM と平行な直線と辺 AB の延長との交点を D とおくと，
$\angle\mathrm{BAM}=\angle\mathrm{ADC}$（同位角），$\angle\mathrm{CAM}=\angle\mathrm{ACD}$（錯角）.
また題意より $\angle\mathrm{BAM}=\angle\mathrm{CAM}$ なので $\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{ACD}$ となることから，$\triangle\mathrm{ACD}$ は $\mathrm{AC}=\mathrm{AD}$ の二等辺三角形であることがわかる.
したがって，$\mathrm{BM}:\mathrm{MC}=\mathrm{BA}:\mathrm{AD}=\mathrm{BA}:\mathrm{AC}=c:b.$
（証明終）



(2) まず (1) より $\overrightarrow{\mathrm{IM}}=\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{IB}}+c\overrightarrow{\mathrm{IC}}}{b+c}$ と表せる.

ここで $\mathrm{BM}=\dfrac{c}{b+c}a$ であり，$\angle\mathrm{B}$ の 2 等分線と AM との交点が内心 I であるので,

$\mathrm{AI}:\mathrm{IM}=c:\dfrac{c}{b+c}a=(b+c):a.$ これより $\overrightarrow{\mathrm{IM}}=-\dfrac{a}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{IA}}.$

以上より $\overrightarrow{\mathrm{IM}}=\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{IB}}+c\overrightarrow{\mathrm{IC}}}{b+c}=-\dfrac{a}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{IA}}.$

これをを整理して $a\overrightarrow{\mathrm{IA}}+b\overrightarrow{\mathrm{IB}}+c\overrightarrow{\mathrm{IC}}=\overrightarrow{0}$ が得られる. （証明終）

(3)

$$\begin{aligned}
&a|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+b|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+c|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2\\
=&a|\overrightarrow{\mathrm{IA}}-\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2+b|\overrightarrow{\mathrm{IB}}-\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2+c|\overrightarrow{\mathrm{IC}}-\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2\\
=&(a+b+c)|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2-2(a\overrightarrow{\mathrm{IA}}+b\overrightarrow{\mathrm{IB}}+c\overrightarrow{\mathrm{IC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{IP}}+a|\overrightarrow{\mathrm{IA}}|^2+b|\overrightarrow{\mathrm{IB}}|^2+c|\overrightarrow{\mathrm{IC}}|^2\\
=&(a+b+c)|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2+a|\overrightarrow{\mathrm{IA}}|^2+b|\overrightarrow{\mathrm{IB}}|^2+c|\overrightarrow{\mathrm{IC}}|^2\quad ((2)\text{ より})
\end{aligned}$$

これより $\overrightarrow{\mathrm{IP}}=\overrightarrow{0}$ つまり $\mathrm{P}=\mathrm{I}$ のとき最小となる. （証明終）

〔4〕 袋の中に赤玉 a 個，白玉 $20-a$ 個の計 20 個の玉が入っている（$0 \leqq a \leqq 20$）。袋の中をかき混ぜてから同時に 4 個の玉を取り出すとき，赤玉の個数が 1 個以下である確率を $P(a)$ と表す。

(1) $P(a)$ は a の多項式であることを示し，因数分解された形で $P(a)$ を表せ。

(2) $0 \leqq a \leqq 19$ の範囲の整数 a に対して，$P(a)$ と $P(a+1)$ の大小を調べよ。

(3) $0 \leqq a \leqq 20$ の範囲の整数 a に対して，$P(a) > 0.95$ を満たす a をすべて求めよ。

解答

(1) $1 \leqq a \leqq 16$ のとき，

$$\begin{aligned} P(a) &= \frac{{}_{20-a}\mathrm{C}_4 + {}_a\mathrm{C}_1 \cdot {}_{20-a}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_4} \\ &= \frac{1}{{}_{20}\mathrm{C}_4 \cdot 24}(20-a)(19-a)(18-a)(17+3a) \\ &= \frac{1}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}(20-a)(19-a)(18-a)(17+3a) \\ &= \frac{1}{116280}(20-a)(19-a)(18-a)(17+3a) \cdots ① \end{aligned}$$

$a=17$ のとき，$P(a) = \dfrac{{}_{17}\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_4} = \dfrac{1}{285}$ は①を満たす.

また，明らかに $P(0)=P(1)=1$，$P(18)=P(19)=P(20)=0$ であるが，①はこれらにも対応する式になっていることが分かる．従って $P(a)$ は確かに a の多項式であり，

$$\boldsymbol{P(a) = \frac{1}{116280}(20-a)(19-a)(18-a)(17+3a)}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(a) - P(a+1) &= \frac{1}{116280}\{(20-a)(19-a)(18-a)(17+3a) - (19-a)(18-a)(17-a)(20+3a)\} \\ &= \frac{(19-a)(18-a)}{116280}\{(20-a)(17+3a) - (17-a)(20+3a)\} \\ &= \frac{(19-a)(18-a)}{116280} \cdot 12a \end{aligned}$$

であるから，

$$\boldsymbol{a = 0,\ 18,\ 19} \text{ のとき } \boldsymbol{P(a) = P(a+1)}$$
$$\boldsymbol{1 \leqq a \leqq 17} \text{ のとき } \boldsymbol{P(a) > P(a+1)}$$

(3) (2) から $P(a)$ は a に対して単調に減少することが分かり（題意を考えればほぼ自明ではある），

$$\begin{aligned} P(2) &= \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 23}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{92}{95} = 0.96\cdots > 0.95 \\ P(3) &= \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 26}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{52}{57} = 0.91\cdots < 0.95 \end{aligned}$$

であるから，$P(a) > 0.95$ を満たすのは $\boldsymbol{a = 0,\ 1,\ 2}$.

〔5〕 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円周上にある 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を 3 頂点とする直角三角形でない三角形 $\triangle ABC$ を考える。A, B, C を原点の周りに角 2θ $(0 < 2\theta < \pi)$ 回転させて得られる点をそれぞれ A_1, B_1, C_1 とする。直線 AB と A_1B_1 の交点を R とする。 AB の中点を M , A_1B_1 の中点を M_1 とする。

(1) $\triangle OMR$ と $\triangle OM_1R$ は合同であることを示せ。

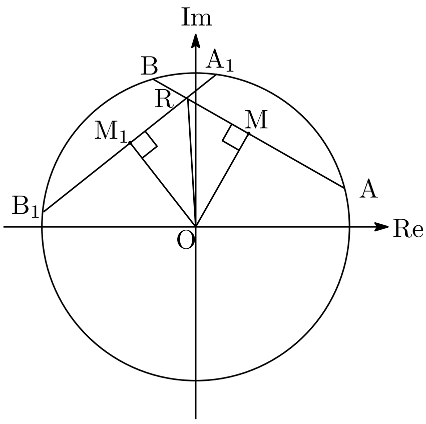
(2) $\angle MOR = \theta$ であることを示せ。

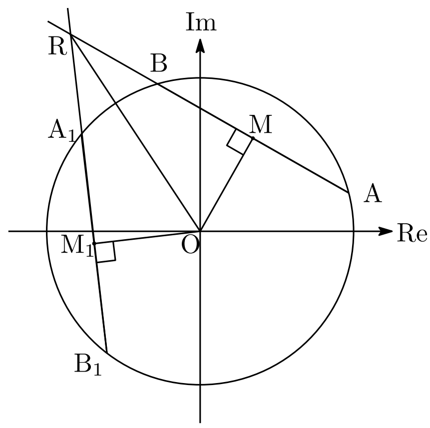
BC と B_1C_1 の交点, CA と C_1A_1 の交点をそれぞれ P, Q とする。また, i を虚数単位とし, $\lambda = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{2\cos\theta}$ とおく。

(3) 点 P, Q, R を表す複素数をそれぞれ α, β, γ, λ によって表せ。

(4) ある点 $D(\delta)$ を中心として, $\triangle ABC$ を回転しある一定の比率で拡大または縮小すると $\triangle PQR$ に重なることを示し, このような δ を α, β, γ, λ によって表せ。

解答





(1) 明らかに $\angle OMR$, $\angle OM_1R$ は直角である. また O を中心に OM を 2θ 回転すると OM_1 に重なるので $OM = OM_1$ である. 斜辺 OR は共通だから $\triangle OMR$ と $\triangle OM_1R$ は合同である. (証明終)

(2) (1) で述べたように $\angle MOM_1 = 2\theta$ だから $\angle MOR = \theta$ である. (証明終)

(3) M は AB の中点だから $M\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ である. (1), (2) より, R は M を O の周りに θ 回転し, 長さを $\dfrac{1}{\cos\theta}$ 倍したものだから, R を表す複素数 z_R は

$$z_R = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \times (\cos\theta + i\sin\theta) \times \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{2\cos\theta}(\alpha+\beta) = \boldsymbol{\lambda(\alpha+\beta)}.$$

同様にして P, Q を表す複素数 z_P, z_Q は $z_P = \boldsymbol{\lambda(\beta+\gamma)}$, $z_Q = \boldsymbol{\lambda(\gamma+\alpha)}$ であることがわかる.

(4) 題意の回転, 拡大縮小を表す複素数を μ とすると δ, μ は次を満たす.

$$\begin{cases} z_P - \delta = \mu(\alpha - \delta) \\ z_Q - \delta = \mu(\beta - \delta) \\ z_R - \delta = \mu(\gamma - \delta) \end{cases} \text{つまり} \begin{cases} -\mu\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma = (-\mu+1)\delta \\ \lambda\alpha - \mu\beta + \lambda\gamma = (-\mu+1)\delta \\ \lambda\alpha + \lambda\beta - \mu\gamma = (-\mu+1)\delta \end{cases}.$$

これより $\mu = -\lambda$ がわかり, $\boldsymbol{\delta = \dfrac{\lambda(\alpha+\beta+\gamma)}{\lambda+1}}$ を得る.

$\boxed{\text{別解}}$

(3) において，以下のようにすると，たとえば R を表す複素数を式変形で求めることも可能である．R(z) とすると，

$$\text{A，B，R が同一直線上にある} \iff \overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)} = \left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$$

であるから，これを整理して

$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z-(\beta-\alpha)\overline{z}=\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta \ \cdots ①$$

を得る．また， $\rho=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ とおくと，$\mathrm{A}_1(\rho\alpha)$，$\mathrm{B}_1(\rho\beta)$ であるから，A_1，B_1，R が同一直線上にあるための条件は ① において α，β をそれぞれ $\rho\alpha$，$\rho\beta$ に置き換えて

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z-\rho(\beta-\alpha)\overline{z} &= \rho\overline{\rho}\alpha\overline{\beta}-\rho\overline{\rho\alpha}\beta \\ &= \alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta \ (\because \ \rho\overline{\rho}=1) \ \cdots ②\end{aligned}$$

と表すことができる．① $\times \rho -$ ② より，

$$(\rho-\overline{\rho})(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z=(\rho-1)(\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta)$$

となるので，$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$，$\overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$，$\overline{\rho}=\dfrac{1}{\rho}$ などに注意すると，

$$\begin{aligned} z &= \frac{(\rho-1)(\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta)}{(\rho-\overline{\rho})(\overline{\beta}-\overline{\alpha})} \\ &= \frac{(\rho-1)\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}{\left(\rho-\dfrac{1}{\rho}\right)\left(\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}\right)} \\ &= \frac{\rho}{\rho+1}(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho+1} &= \frac{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{\cos 2\theta+i\sin 2\theta+1} \\ &= \frac{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta} \\ &= \frac{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{2\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)} \\ &= \frac{\cos\theta+i\sin\theta}{2\cos\theta} \\ &= \lambda\end{aligned}$$

であるから， $z=\lambda(\alpha+\beta)$ となる．

講評

〔1〕[パラメータ]（標準）典型的なパラメータの問題．丁寧に計算していくだけ．細部の失点には気をつけたい．

〔2〕[数Ⅲ積分]（標準）非回転体の体積の問題．これも典型的な問題．

〔3〕[ベクトル]（標準）三角形の内心をベクトルで扱う問題．

〔4〕[確率]（標準）やっていること自体は単純．(3) の計算が煩雑．

〔5〕[複素数]（やや難）複素数を用いて平面幾何を扱う問題．慣れが必要．完答し辛い．

例年通りの難易度に戻った（昨年より難化）．すべての問題が「標準〜やや難」という実力の差が出やすいセット．大いに差がつきそうだ．全問見渡して完答 2 題，半答 3 題で乗り切りたいところ．ボーダーは 6 割 5 分.

医歯学部進学予備校 メビオ

〒540-0033 大阪市中央区石町2-3-12 ベルヴォア天満橋

TEL 06-6946-0109 FAX 06-6941-9416

http://www.mebio.co.jp/

MeBio Scholastics