大阪医科大学 2016年度(後期)入学試験 解答速報 数学

2016年3月10日 実施

〔1〕

(1) $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(2) $a,\ b,\ c$ についての次の方程式の有理数解をすべて求めよ：

$$a+\sqrt{2}b+\sqrt{3}c=0$$

(3) $p,\ q,\ r$ についての次の方程式の有理数解をすべて求めよ：

$$(1+\sqrt{3})p+(\sqrt{2}-1)q+(\sqrt{3}-\sqrt{2})r=1$$

解答

(1) 背理法で証明する．

$\sqrt{2}$ が有理数であるとすると，$\sqrt{2}=\dfrac{e}{d}$ （ d と e は互いに素な自然数）とおける．

これを変形すると $2d^2=e^2$ $\cdots$① となるので e^2 は偶数であり，したがって e が偶数であることから $e=2k$（k は自然数）とおける．このとき

$$① \iff 2d^2=4k^2 \iff d^2=2k^2$$

より d^2 は偶数であり，したがって d が偶数となるが，d および e がともに偶数であることは d と e が互いに素であることに反する．よって $\sqrt{2}$ は無理数である．

次に，$\sqrt{3}$ が有理数であるとすると，$\sqrt{3}=\dfrac{g}{f}$ （ f と g は互いに素な自然数）とおける．

これを変形すると $3f^2=g^2$ $\cdots$② となるので g^2 は 3 の倍数であり，したがって g が 3 の倍数であることから $g=3l$（l は自然数）とおける．このとき

$$② \iff 3f^2=9l^2 \iff f^2=3l^2$$

より f^2 は 3 の倍数であり，したがって f が 3 の倍数となるが，f および g がともに 3 の倍数であることは f と g が互いに素であることに反する．よって $\sqrt{3}$ は無理数である．　（証明終）

(2)

$$a+\sqrt{2}b+\sqrt{3}c=0 \iff a+\sqrt{2}b=-\sqrt{3}c \ \cdots③$$

であり，両辺を 2 乗して整理すると $2\sqrt{2}ab=3c^2-a^2-2b^2$ が得られる．

ここで，$ab\neq 0$ であるとすると，$\sqrt{2}=\dfrac{3c^2-a^2-2b^2}{2ab}$ となり，左辺が (1) より無理数，右辺は有理数であるから矛盾する．したがって，$ab=0$ である．

よって以下では $a=0$ および $b=0$ のときにわけて議論する．

(i) $a=0$ のとき，もし $c\neq 0$ とすると，

$$③ \iff \sqrt{2}b=-\sqrt{3}c \iff \sqrt{6}=-\frac{2b}{c} \ \cdots④$$

となる．ここで，「$\sqrt{6}$ は無理数である」 $\cdots$⑤ であることを示そう．

$\sqrt{6}$ が有理数であるとすると，$\sqrt{6}=\dfrac{i}{h}$（h と i は互いに素な自然数）とおける．

これを変形すると $6h^2=i^2$ $\cdots$⑥ となるので i^2 は 6 の倍数であり，したがって i が 6 の倍数であることから $i=6m$（m は自然数）とおける．このとき

$$⑥ \iff 6h^2=36m^2 \iff h^2=6m^2$$

より h^2 は 6 の倍数であり，したがって h が 6 の倍数となるが，h および i がともに 6 の倍数であることは h と i が互いに素であることに反する．よって $\sqrt{6}$ は無理数である．　(⑤の証明終)

よって ④ において，左辺は無理数，右辺は有理数となり矛盾するので，$c=0$ であり，したがって $b=0$ となる．

(ii) $b=0$ のとき，もし $c\fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$ とすると，

$$③ \iff \sqrt{3}=-\frac{a}{c}$$

となるが，ここで左辺が (1) より無理数，右辺は有理数となり矛盾するので，$c=0$ であり，したがって $a=0$ となる．

以上により有理数解は $\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)}$ のみである．

(3)

$$与方程式 \iff (p-q-1)+\sqrt{2}(q-r)+\sqrt{3}(p+r)=0$$

である．ここで，$p-q-1$，$-q-r$，$p+r$ はすべて有理数であるから (2) により

$$\begin{cases} p-q-1=0 \\ q-r=0 \\ p+r=0 \end{cases}$$

となるので，これを解いて $\boldsymbol{(p,\ q,\ r)=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)}$ である．

注釈

「g^2 が 3 の倍数ならば g は 3 の倍数である」,「 i^2 が 6 の倍数ならば i は 6 の倍数である」などを自明のものとして議論してきたが，これについては対偶命題を考えるとわかりやすい．たとえば「g^2 が 3 の倍数ならば g は 3 の倍数である」の対偶命題は「 g が 3 の倍数でなければ g^2 は 3 の倍数ではない」であるが，3 を法とする剰余で考えるとこれは明らかである．

〔２〕 複素数平面の原点を中心とし，半径 1 の円周を C とする。

(1) 複素数 α，β が C 上を動くとき $z=\alpha+\beta$ の値の範囲を求めよ。

(2) (1) で更に，α，β，1 が三角形をなすようにという条件をおくとき，z の値の範囲を求め，複素数平面に図示せよ。

解答

(1) $\alpha=\cos A+i\sin A$, $\beta=\cos B+i\sin B$ と置くと，

$$\begin{aligned} z &= \alpha+\beta=(\cos A+i\sin A)+(\cos B+i\sin B)=(\cos A+\cos B)+i(\sin A+\sin B) \\ &= 2\cos\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+i\sin\frac{A+B}{2}\right) \end{aligned}$$

α, β が制限無しに動く場合 $\left(\dfrac{A+B}{2},\ \dfrac{A-B}{2}\right)$ もすべての実数の組を取り得るので，z は $|z|\leqq 2$（$\arg z$ は任意）の範囲を動く．答は **$|z|\leqq 2$ で表される領域**（$z=x+yi$ とおくと $x^2+y^2\leqq 4$）.

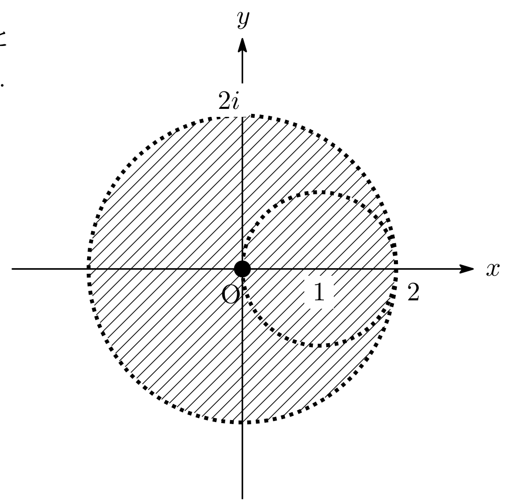
(2) 円周上の異なる 3 点は三角形をなすので，与えられた制限は $\alpha\fallingdotseq 1$, $\beta\fallingdotseq 1$, $\alpha\fallingdotseq\beta$ の 3 つである．そこで (1) の領域から，$\alpha=1$ または $\beta=1$ または $\alpha=\beta$ の場合にしか実現できない領域を除けばよい.

(i) $\alpha=1$ の場合.
$z=1+\beta$ であり．この軌跡は C を 1 だけ平行移動したものだから $|z-1|=1$ である．この円上の点が C 上の 1 でない異なる複素数 γ, δ を用いて $z=\gamma+\delta$ と表される場合は，その点を除いてはいけないが，それが起こるのは $\beta=-1(\iff z=0)$ の場合に限ることが図形的にすぐわかる.

(ii) $\beta=1$ の場合.
(i) と同じである.

(iii) $\alpha=\beta$ の場合.
$z=2\alpha$ であるから z の軌跡は $|z|=2$ である．この円上の点は C 上の 1 でない異なる複素数 γ, δ を用いて $z=\gamma+\delta$ と表されることはない．従って $|z|=2$ はすべて除去しなければならない.

以上より求める領域は右下図の通り.
つまり原点を中心とする半径 2 の円の内部から，1 を中心とする半径 1 の円の原点以外の部分を取り除いた領域である.



$\boxed{\text{別解}}$

計算で求めることもできる．$\alpha = \cos A + i\sin A$, $\beta = \cos B + i\sin B$ と置く．与条件より $A \fallingdotseq 2k\pi$, $B \fallingdotseq 2l\pi$, $A - B \fallingdotseq 2m\pi$ $(k,\ l,\ m \in \boldsymbol{Z})$.

$$z = \alpha + \beta = 2\cos\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2} + i\cos\frac{A+B}{2}\right) = 2\cos X(\cos Y + i\sin Y)$$

ただし $X = \dfrac{A-B}{2}$, $Y = \dfrac{A+B}{2}$ と置いた．$A = X + Y$, $B = Y - X$ より

$$\begin{aligned} & A \fallingdotseq 2k\pi,\ B \fallingdotseq 2l\pi,\ A - B \fallingdotseq 2m\pi \\ \iff & \begin{cases} X + Y \fallingdotseq 2k\pi \\ Y - X \fallingdotseq 2l\pi \\ X \fallingdotseq m\pi \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \sin\dfrac{X+Y}{2}\sin\dfrac{X-Y}{2} \fallingdotseq 0 & \cdots ① \\ X \fallingdotseq m\pi & \cdots ② \end{cases} \end{aligned}$$

である．

$z = x + iy$ $(x,\ y \in \boldsymbol{R})$ とおくと，②より，

$$\cos X \fallingdotseq \pm 1 \iff 4\cos^2 X < 4 \iff x^2 + y^2 < 4$$

さらに①より，$-\dfrac{1}{2}(\cos X - \cos Y) \fallingdotseq 0 \iff \cos X \fallingdotseq \cos Y$ であるが，$\cos X \fallingdotseq 0$ すなわち $(x,\ y) \fallingdotseq (0,\ 0)$ のとき，

$$\begin{aligned} & \cos X \fallingdotseq \cos Y \\ \iff & 4\cos^2 X \fallingdotseq 4\cos X\cos Y \\ \iff & x^2 + y^2 \fallingdotseq 2x \\ \iff & (x-1)^2 + y^2 \fallingdotseq 1 \end{aligned}$$

である．また，$\cos X = 0$ のとき $(x,\ y) = (0,\ 0)$ であるが，例えば $X = \dfrac{\pi}{2}$, $Y = 0$ は条件を満たす.

従って上の解答と同じ結果を得る.

〔3〕 数列 $\{a_n\}$ がすべての自然数 n について $0 < a_n < 1$ をみたしているとする。この数列 $\{a_n\}$ を用いて，一辺の長さが 1 の正方形 $\mathrm{A_0B_0C_0D_0}$ から始めて，四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を次の規則で定義する。

辺 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}$, $\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}$, $\mathrm{C}_{n-1}\mathrm{D}_{n-1}$, $\mathrm{D}_{n-1}\mathrm{A}_{n-1}$ を $a_n : 1-a_n$ に内分する点をそれぞれ A_n, B_n, C_n, D_n とする。

四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ の面積を S_n とし，$T_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} S_n$ とする。

(1) すべての自然数 n に対し $a_n = \dfrac{1}{3}$ であるとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} T_k$ を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。定数 $b_1,\ \cdots,\ b_n$ が $0 < b_i < 1$ $(i = 1,\ \cdots,\ n)$ をみたすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-b_1)(1-b_2)\cdots(1-b_n) > 1-(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

(3) すべての自然数 n に対し $a_n = \dfrac{1}{3^n}$ であるとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{T_k}$ を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ を L_n とすると，$\{L_n\}$ は正方形の列となる．

(1) 正方形 L_{n-1} と L_n の辺長の比は，$1 : \sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2} = 1 : \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ であるので，数列 $\{S_n\}$ は $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{9}$ を公比とする等比数列となる．$-1 < \dfrac{5}{9} < 1$ であるから，

$$\lim_{k\to\infty} T_k = \frac{S_1}{1-\dfrac{5}{9}} = \frac{\dfrac{5}{9}}{\dfrac{4}{9}} = \mathbf{\frac{5}{4}}.$$

(2) 数学的帰納法で示す．

(i) $n = 2$ のとき，

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = (1-b_1)(1-b_2) - \{1-(b_1+b_2)\} = b_1b_2 > 0$$

となるので与不等式は成立する．

(ii) $n = k$ のとき，与不等式つまり

$$(1-b_1)(1-b_2)\cdots(1-b_k) > 1-(b_1+b_2+\cdots+b_k)$$

が成立すると仮定すると，$1-b_{k+1} > 0$ に注意して，

$$\begin{aligned}&(1-b_1)(1-b_2)\cdots(1-b_k)(1-b_{k+1})\\>&\{1-(b_1+b_2+\cdots+b_k)\}(1-b_{k+1})\\=&1-(b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1})+(b_1+b_2+\cdots+b_k)b_{k+1}\\>&1-(b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1})\end{aligned}$$

となるので $n = k+1$ でも与不等式は成立する．

以上から $n \geqq 2$ で与不等式は成立する．　（証明終）

(3) 正方形 L_{n-1} と L_n の辺長の比は，$1 : \sqrt{\left(\dfrac{1}{3^n}\right)^2 + \left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)^2} = 1 : \sqrt{1-\dfrac{2(3^n-1)}{3^{2n}}}$ であるので，$S_n = \left(1-\dfrac{2(3^n-1)}{3^{2n}}\right)S_{n-1}$ である．$0 < \dfrac{2(3^n-1)}{3^{2n}} = \dfrac{2}{3^n}\cdot\dfrac{3^n-1}{3^n} < 1$ であるから，

$b_n = \dfrac{2(3^n-1)}{3^{2n}}$ とすると (2) の不等式が成立することに注意して,

$$
\begin{aligned}
S_n =&(1-b_n)S_{n-1}\\
=&(1-b_n)(1-b_{n-1})S_{n-2}\\
=&\cdots\\
=&(1-b_n)(1-b_{n-1})\cdots(1-b_1)\\
>&1-\sum_{i=1}^{n} b_i\\
=&1-\sum_{i=1}^{n}\frac{2(3^i-1)}{3^{2i}}\\
=&1-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{3^i}-\frac{2}{3^{2i}}\right)\\
=&\frac{1}{4}+\frac{4\cdot 3^n-1}{4\cdot 9^n}\\
>&\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

となるので, $T_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} S_n > \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{4} = \frac{k}{4}$ が成り立つ. したがって $0 < \dfrac{1}{T_k} < \dfrac{4}{k}$ となり,

$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{4}{k} = 0$ であるから, はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{T_k} = \mathbf{0}$.

〔４〕 $P(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{2}$ とおく。区間 $I = \left\{\theta \,\middle|\, -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ において，$f_1(\theta)$，$f_2(\theta)$，$f_3(\theta)$ を次のように定める：

$$f_1(\theta) = P(\cos\theta),\ f_2(\theta) = P(f_1(\theta)),\ f_3(\theta) = P(f_2(\theta))$$

$f_3(\theta)$ の導関数を $f_3'(\theta)$ と表す。他の $f_1(\theta)$，$f_2(\theta)$ に対しても同様とする。

(1) I において，$f_1(\theta)$，$f_2(\theta)$ それぞれの値の範囲を求めよ。

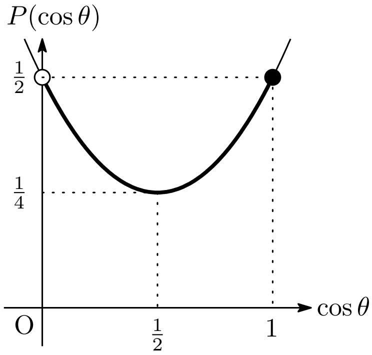
(2) $f_3'(\theta)$ となる θ は $f_2'(\theta)$ も満たすことを示せ。

(3) I において，$f_3(\theta)$ の極値を求めよ。

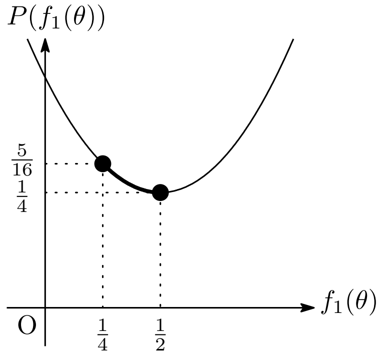
$\boxed{\text{解答}}$

(1) 区間 I において $0 < \cos\theta \leqq 1$ である．$P(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$ と書けることより，$f_1(\theta) = P(\cos\theta)$ の範囲は $\boldsymbol{\dfrac{1}{4} \leqq f_1(\theta) \leqq \dfrac{1}{2}}$ である［図 1］.

同様にグラフ［図 2］より，$f_2(\theta) = P(f_1(\theta))$ の範囲は $\boldsymbol{\dfrac{1}{4} \leqq f_2(\theta) \leqq \dfrac{5}{16}}$ である.



［図 1］



［図 2］

(2) $f_3'(\theta) = P'(f_2(\theta))f_2'(\theta) = (2f_2(\theta) - 1)f_2'(\theta)$ である．ここで (2) より $-\dfrac{1}{2} \leqq 2f_2(\theta) - 1 \leqq -\dfrac{3}{8}$ なので $2f_2(\theta) - 1 \fallingdotseq 0$ である．したがって $f_3'(\theta) = 0 \iff f_2(\theta) = 0$ である．　（証明終）

(3)

$$\begin{aligned}
f_3'(\theta) =&(2f_2(\theta) - 1)f_2'(\theta)\\
=&(2f_2(\theta) - 1)P'(f_1(\theta))f_1'(\theta)\\
=&(2f_2(\theta) - 1)(2f_1(\theta) - 1)P'(\cos\theta)(-\sin\theta)\\
=&-(2f_2(\theta) - 1)(2P(\cos\theta) - 1)(2\cos\theta - 1)\sin\theta\\
=&-2(2f_2(\theta) - 1)\cos\theta(\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1)\sin\theta
\end{aligned}$$

である．増減表は以下の通り．

θ	$\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	$-\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f_3'(\theta)$	(0)	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	(0)
$f_3(\theta)$	$\left(\dfrac{5}{16}\right)$	$\searrow$	$\dfrac{73}{256}$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{16}$	$\searrow$	$\dfrac{73}{256}$	$\nearrow$	$\left(\dfrac{5}{16}\right)$

以上より，**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{16}\ (x = 0)}$，**極小値** $\boldsymbol{\dfrac{73}{256}\ \left(x = \pm\dfrac{\pi}{3}\right)}$ である.

〔５〕 4 枚のカードの表にそれぞれ 1, 2, 3, 4 が記されている。4 枚のカードを裏返し，よく混ぜて 1 枚を取り出し，カードに記された数を見て元に戻す。$n \geqq 2$ として，この操作を n 回繰り返すとき，取り出されたカードの数の合計を X_n とする。

(1) n 回の操作で 1, 2, 3, 4 のカードが出た回数をそれぞれ $a,\ b,\ c,\ d$ 回とする。$X_n = n+4$ となるような $a,\ b,\ c,\ d$ の組み合わせをすべてあげよ。

(2) $X_n = n+4$ である確率を求めよ。

解答

(1) (i) $n=2$ のとき $X_2=6$ となるのは $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,\ 0,\ 2,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0,\ 1)$ の 2 組.

(ii) $n=3$ のとき $X_3=7$ となるのは $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 0,\ 2,\ 0),\ (1,\ 1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 2,\ 1,\ 0)$ の 3 組.

(iii) $n \geqq 4$ のとき $X_n = a+2b+3c+4d = n+4$ と $a+b+c+d=n$ が成り立つ.
この 2 式を辺々引くと $b+2c+3d=4$. これをみたす 0 以上の整数 $b,\ c,\ d$ の組を探すと
$(b,\ c,\ d)=(0,\ 2,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1),\ (2,\ 1,\ 0),\ (4,\ 0,\ 0)$ の 4 組とわかる.
$a+b+c+d=n$ より答は
$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d)=(n-2,\ 0,\ 2,\ 0),\ (n-2,\ 1,\ 0,\ 1),\ (n-3,\ 2,\ 1,\ 0),\ (n-4,\ 4,\ 0,\ 0)}$.

(2) (1) で求めた各場合の確率を合計すればよいので，$n \geqq 4$ のとき求める確率は

$$\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{n!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{n!}{(n-3)!\cdot 2!}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{n!}{(n-4)!\cdot 4!}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \frac{n}{24}(n-1)(n^2+7n+18)\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n-1)(n^2+7n+18)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}}$$ （これは $n=2,\ 3$ のときも成り立つ）.

講評

〔1〕（整数）（標準）よく知られた証明問題．同じ証明を何度も書かねばならず煩雑である．

〔2〕（複素数）（やや難）(1) は易しいが，(2) の領域を厳密に論じるのは難しい．

〔3〕（極限）（やや難）(2) をうまく利用して (3) の評価式をたてられるかどうかがポイント．

〔4〕（微分）（標準）合成関数の微分計算をうまく処理していきたい．

〔5〕（確率）（標準）数え落としが命取りとなる．内容自体は易しい．

昨年度後期，今年度前期に比べて難化した．スーッと答えにたどり着くような問題はほとんどなく，力の差が出やすいセットとなっている．〔1〕，〔4〕，〔5〕は半答以上，〔2〕，〔3〕は半答前後で仕上げたい．ボーダーは 7 割程度．