大阪医科大学 2016年度（前期）入学試験 解答速報 数学

2016年2月11日 実施

〔1〕

(1) 変数 $u \geqq 1,\ v \geqq 1$ が関係式 $u+v=3$ をみたすとき，積 uv の値の範囲を示せ。

変数 $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ が関係式 $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=3$ をみたすとする。$u=\sqrt{1+x^2},\ v=\sqrt{1+y^2},\ t=uv$ とおく。

(2) xy を t の関数として表せ。

(3) $(x+y)^2$ を t の関数として表せ。

(4) $x+y$ の値の範囲を示せ。

解答

(1) $u+v=3$ より $uv=u(-u+3)=-\left(u-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$.

ここで $u \geqq 1,\ v \geqq 1$ より $1 \leqq u \leqq 2$ なので $2 \leqq uv \leqq \dfrac{9}{4}$.

(2) $u+v=3$ より $u^2+v^2=9-2uv=9-2t$.
したがって $x^2y^2=(u^2-1)(v^2-1)=u^2v^2-(u^2+v^2)+1=t^2-(9-2t)+1=t^2+2t-8$,
$\therefore\ xy=\sqrt{t^2+2t-8}$.

(3) $(x+y)^2=(x^2+y^2)+2xy=(u^2-1)+(v^2-1)+2xy=9-2t-2+2\sqrt{t^2+2t-8}$
$=7-2t+2\sqrt{t^2+2t-8}$.

(4) $f(t)=-2t+7+2\sqrt{t^2+2t-8}$ とおくと (1) より $2 \leqq t \leqq \dfrac{9}{4}$.

$f'(t)=-2+\dfrac{2t+2}{\sqrt{t^2+2t-8}}=\dfrac{-2\sqrt{t^2+2t-8}+2(t+1)}{\sqrt{t^2+2t-8}}$.

ここで (分子) $=-2\sqrt{(t+1)^2-9}+2(t+1)>0$ なので $f'(t)>0$ が成り立ち，$f(t)$ が単調に増加することが分かる．$f(2)=3, f\left(\dfrac{9}{4}\right)=5$ より $3 \leqq f(t) \leqq 5$. よって $\sqrt{3} \leqq x+y \leqq \sqrt{5}$.

〔２〕 自然数 $a,\ b$ に対して，その最大公約数を $G(a,\ b)$ とする。

(1) $a > b$ のとき，$G(a,\ b) = G(a-b,\ b)$ を示せ。

自然数 n に対して $(1+\sqrt{3})^n = p_n + q_n\sqrt{3}$（$p_n$，$q_n$ は自然数）とおく。

(2) $G(p_{n+2},\ q_{n+2})$ と $G(p_n,\ q_n)$ の関係式を導け。

(3) $G(p_n,\ q_n)$ の値を求めよ。

解答

(1) $G(a,\ b) = g$, $G(a-b,\ b) = h$ とおく．$a = gk$, $b = gl$ となる自然数 k, l が存在する．このとき $a - b = gk - gl = g(k-l)$ であるから g は $a-b$ の約数でもある．したがって，$g = G(a,\ b)$ は a と $a-b$ の公約数であるから h の約数であることがわかる．
また，$G(a-b,\ b) = h$ より $a - b = hs$, $b = ht$ となる自然数 s, t が存在する．このとき $a = (a-b)+b = hs+ht = h(s+t)$ であるから h は a の約数でもある．したがって，$h = G(a-b,\ b)$ は a と b の公約数であるから g の約数であることもわかる．
以上より g は h の約数かつ h は g の約数なので $G(a,\ b) = G(a-b,\ b)$ であることが証明された．

(2) $p_{n+2} + q_{n+2}\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2(1+\sqrt{3})^n = (4+2\sqrt{3})(p_n + q_n\sqrt{3}) = (4p_n + 6q_n) + (2p_n + 4q_n)\sqrt{3}$ であるが，$\sqrt{3}$ は無理数であるから $p_{n+2} = 4p_n + 6q_n$, $q_{n+2} = 2p_n + 4q_n$ である．

$G(a,\ b) = G(b,\ a)$ であることや，$G(ka,\ kb) = kG(a,\ b)$ (k は自然数) であることは明らかなので，(1) より

$$\begin{aligned}
&G(p_{n+2},\ q_{n+2}) = G(4p_n + 6q_n,\ 2p_n + 4q_n) = 2G(2p_n + 3q_n,\ p_n + 2q_n) \\
=\ &2G((2p_n + 3q_n) - (p_n + 2q_n),\ p_n + 2q_n) = 2G(p_n + q_n,\ p_n + 2q_n) \\
=\ &2G(p_n + q_n,\ (p_n + 2q_n) - (p_n + q_n)) = 2G(p_n + q_n,\ q_n) \\
=\ &2G(p_n,\ q_n)
\end{aligned}$$

(3) $p_1 = q_1 = 1$ より $G(p_1,\ q_1) = 1$ である．したがって n が奇数の場合，$n = 2m-1$ とおくと
$G(p_n,\ q_n) = G(p_{2m-1},\ q_{2m-1}) = 2^{m-1}G(p_1,\ q_1) = 2^{m-1} = 2^{\frac{n-1}{2}}$
また $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$ より $p_2 = 4$, $q_2 = 2$ で $G(p_2,\ q_2) = 2$ である．したがって n が偶数の場合，$n = 2m$ とおくと $G(p_n,\ q_n) = G(p_{2m},\ q_{2m}) = 2^{m-1}G(p_2,\ q_2) = 2^{m-1}\cdot 2 = 2^m = 2^{\frac{n}{2}}$

答は $G(p_n,\ q_n) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & (n \text{ が奇数の場合}) \\ 2^{\frac{n}{2}} & (n \text{ が偶数の場合}) \end{cases}$

〔3〕 e を自然対数の底として，$f(x)=e^x-2x^2$ とおく。$2<e<2\sqrt{2}$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\infty$ は既知とする。

(1) $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数とするとき，方程式 $f'(x)=0$ は2つの解を持つことを示せ。

(2) 方程式 $f'(x)=0$ の2つの解を $a,\ b\ (a<b)$ とするとき，$0<a<2<b$ を示せ。

(3) 方程式 $f(x)=0$ は3つの解を持つことを示せ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $f'(x)=e^x-4x,\ f''(x)=e^x-4$ より，$f''(x)=0$ の解は $x=\log 4$ であり，

また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(e^x-4x)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{4}{x}\right)=\infty$ であるから，$f'(x)$ の増減は以下のようになる．

x	$-\infty$	$\cdots$	$\log 4$	$\cdots$	∞
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	∞	$\searrow$	$4(1-\log 4)$	$\nearrow$	∞

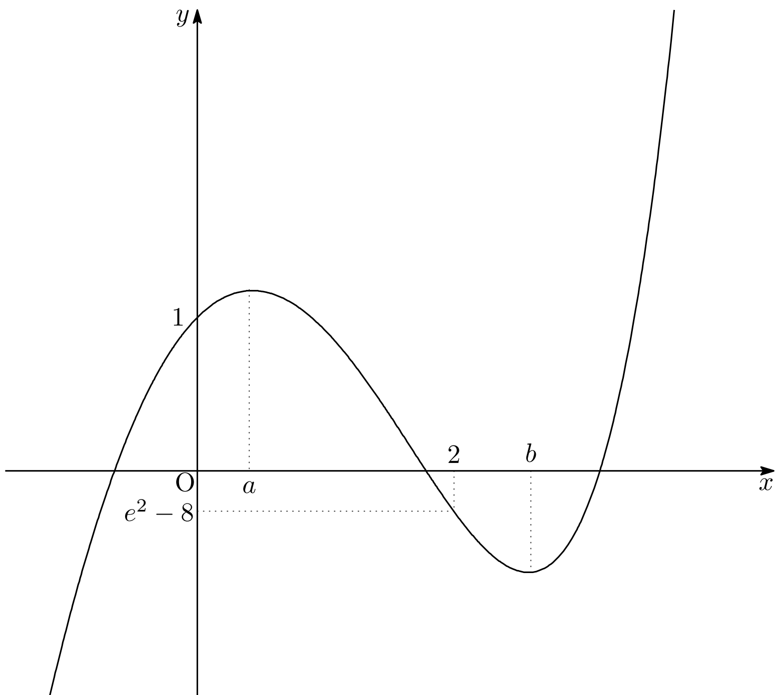
ここで，$4(1-\log 4)<0$ であるから方程式 $f'(x)=0$ は確かに2つの解を持つ．

(2) $f'(0)=1>0$ および $f'(2)=e^2-8<0$ であることと，(1) の増減表より $0<a<2<b$ は成立する．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(e^x-2x^2)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-2\right)=\infty$ であることに注意すると，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$-\infty$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$	(2)	$\cdots$	b	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	e^2-8	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	∞

したがって，$f(0)=1>0,\ f(2)=e^2-8<0$ であることから方程式 $f(x)=0$ は3つの解を持つ．



$y=f(x)$ のグラフ

〔4〕 半径が等しい 2 つの円と一辺の長さ 2 の正三角形 ABC がある。2 つの円は互いに外接している。さらに一方の円は辺 AB と BC に接し，他方の円は CA と BC に接している。

(1) これらの円の半径を求めよ。

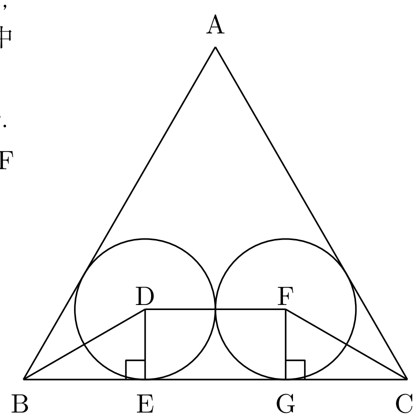
(2) 2 つの円の周および内部を，三角形 ABC の A を通る中線の周りに回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答

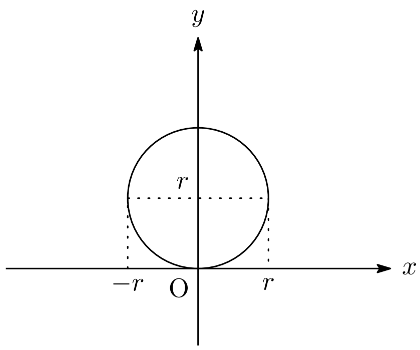
(1) 求める円の半径を r とおく．辺 AB と BC に接する円の中心を D，その円と BC との接点を E とおき，辺 CA と BC に接する円の中心を F，その円と BC との接点を G とおく（図参照）．
$\triangle$BDE について，$\angle$DBE $= 30^\circ$，$\angle$DEB $= 90^\circ$ より，BE $= \sqrt{3}r$．
$\triangle$CFG についても同様なので，CG $= \sqrt{3}r$．また，四角形 DEGF は長方形なので EG $=$ DF $= 2r$．
よって，辺 BC の長さについて方程式

$$\sqrt{3}r + 2r + \sqrt{3}r = 2$$

が成り立つ．これを解いて，$r = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$．



(2) 求める体積は，円 $x^2 + (y-r)^2 = r^2$ を x 軸の周りに回転してできる立体の体積と同じである．
$x^2 + (y-r)^2 = r^2 \iff y = r \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ であることより，求める体積は



$$\int_{-r}^{r} \pi \left(r + \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx - \int_{-r}^{r} \pi \left(r - \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx$$

$$= 4\pi r \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$$= 4\pi r \cdot \frac{\pi r^2}{2}$$

（ここで定積分が半径 r の半円の面積と同じであることを用いた）

$$= 2\pi^2 r^3 = 2\pi^2 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)^3 = \frac{(3\sqrt{3}-5)\pi^2}{2}$$

注釈

パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem)：
軸をまたがない図形を回転させてできる立体の体積 V は，

$V =$（重心が回転軸を 1 周するときに描く円周の長さ）$\times$（図形の面積）

である．

というものがある．この円の中心は $(0,\ r)$ なので，重心が回転軸を 1 周する長さは $2\pi r$，円の面積は πr^2 から，求める体積は $2\pi r \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^3$ と一瞬で出てしまう．

〔5〕 1，2，3，4，5 と記されたカードがそれぞれ 2 枚ずつ，合計 10 枚のカードがある。以下のゲームを行い，当たり，外れを決める。

10 枚のカードをよく混ぜて，2 枚引く。引いたカードの 2 数の合計を A とおく。$A \geqq 7$ のときは外れ，$A = 6$ のときは当たりとする。$A \leqq 5$ のときは，残りの 8 枚のカードの中から更に 1 枚を引き，3 枚のカードの合計を B とする。$B \fallingdotseq 6$ ならば外れ，$B = 6$ ならば当たりとする。

(1) $A = 6$ である確率を求めよ。

(2) このゲームで当たりとなる確率を求めよ。

解答

(1) $A = 6$ となるような 2 枚の組合せは (1，5)，(2，4)，(3，3) であるから，

求める確率は $P(A=6) = \dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 + {}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 + {}_2\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = \dfrac{1}{5}$.

(2) $A \leqq 5$ かつ $B = 6$ となる事象と確率は以下の通り．

（はじめの 2 枚の組が (2，2) のときは 3 枚目が 2 であるべきだが，それは有り得ないことに注意）

はじめの 2 枚の組	A	3 枚目	確率
(1, 1)	2	4	$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} \cdot \dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_1}$
(1, 2)	3	3	$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2} \cdot \dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_1}$
(1, 3)	4	2	$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2} \cdot \dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_1}$
(1, 4)	5	1	$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2} \cdot \dfrac{{}_1\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_1}$
(2, 3)	5	1	$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2} \cdot \dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_1}$
			(計) $\dfrac{1}{12}$

したがって求める確率は $P(A=6) + P(A \leqq 5 \cap B = 6) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{17}{60}$.

講評

〔1〕（やや難）数Ⅲの微分．文字が多く処理がやや煩雑である．

〔2〕（やや難）整数問題と漸化式の融合題．(1) の証明で戸惑った受験生が多かったかも知れない．また，(2) の漸化式を導けるかどうかで差がつきそう．

〔3〕（標準）数Ⅲの微分．グラフを利用した解の議論．

〔4〕（標準）数Ⅲの積分．回転体の体積．

〔5〕（標準）確率．トランプのブラックジャックのような設定．しっかり場合分けができれば難しくはない．

去年に比べて易化した．〔3〕，〔4〕，〔5〕をほぼ完答し，〔1〕，〔2〕でどれだけ部分点がとれたかの勝負．ボーダーは 7 割程度か．