大阪医科大学 2015年度（前期）入学試験 解答速報 数学

2015年2月10日 実施

〔1〕 $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^{n-k}$ $(n=1,\,2,\,\cdots)$ とおく。

(1) 和 a_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を次のように 4 個ずつの群に分ける：

$$|\,a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4\,|\,a_5,\,a_6,\,a_7,\,a_8\,|\,\cdots\cdots$$

このとき，各群の 2 つ目の項以外の 3 数は，5 で割ったときの余りが等しいことを示せ。

解答

(1)
$$\begin{aligned} 2a_n &= 1\cdot 2^n+2\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^{n-2}+\ \cdots\ +(n-1)\cdot 2^2+n\cdot 2^1 \\ a_n &= \qquad\quad 1\cdot 2^{n-1}+2\cdot 2^{n-2}+\ \cdots\ +(n-2)\cdot 2^2+(n-1)\cdot 2^1+n\cdot 2^0 \end{aligned}$$

これら 2 式を辺々引くと

$$a_n=(2^n+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2^1)-n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=\boldsymbol{2^{n+1}-n-2}$$

(2) $2^4\equiv 1\pmod 5$ であることに注意する．以下，k を自然数として

$$\begin{aligned} a_{4k-3} &\equiv 2^{4k-2}-(4k-3)-2 &&\equiv 4-(4k-3)-2 &&\equiv -4k &&\pmod 5 \\ a_{4k-2} &\equiv 2^{4k-1}-(4k-2)-2 &&\equiv 3-(4k-2)-2 &&\equiv 3-4k &&\pmod 5 \\ a_{4k-1} &\equiv 2^{4k}-(4k-1)-2 &&\equiv 1-(4k-1)-2 &&\equiv -4k &&\pmod 5 \\ a_{4k} &\equiv 2^{4k+1}-4k-2 &&\equiv 2-4k-2 &&\equiv -4k &&\pmod 5 \end{aligned}$$

となるから，各群の 2 つ目の項以外の 3 数を，5 で割ったときの余りは等しい．　（証明終）

〔２〕 平面上の三角形 ABC は二等辺三角形でないと仮定する。3 つの内角 ∠A，∠B，∠C の対辺の長さをそれぞれ a，b，c とする。三角形 ABC の外接円を F，外心を O とする。点 A における F の接線と直線 BC の交点を S とする。同様に点 B における F の接線と直線 CA の交点を T，点 C における F の接線と直線 AB の交点を U とする。

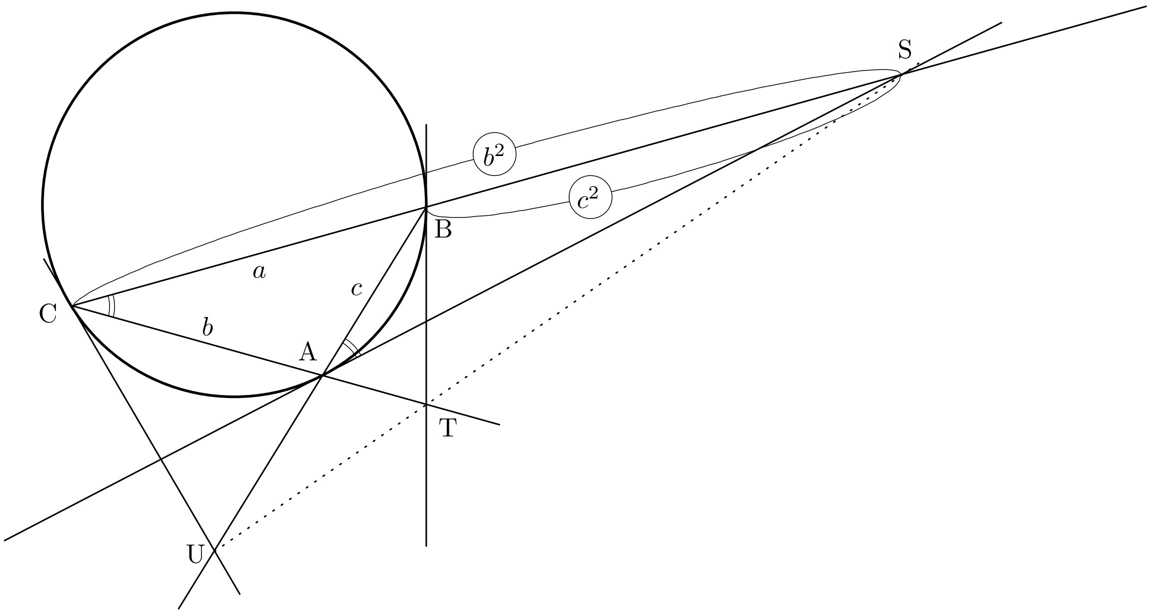
(1) △SAB と △SCA は相似であることを示し，2 つの三角形の面積の比を a，b，c を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \dfrac{c^2\overrightarrow{\mathrm{OC}} - b^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{c^2 - b^2}$ を示せ。

(3) $x\overrightarrow{\mathrm{OS}} + y\overrightarrow{\mathrm{OT}} + z\overrightarrow{\mathrm{OU}} = \overrightarrow{0}$ を満たす 0 でない実数 x，y，z の 1 組を a，b，c を用いて表せ。

(4) (3) で求めた x，y，z は $x + y + z = 0$ を満たすことを示して，S，T，U は一直線上にあることを示せ。

解答



(1) $b > c$ の場合を示す．△SAB と △SCA において，∠S は共通．接弦定理より ∠SAB = ∠SCA．2 組の角が互いに等しいので，△SAB と △SCA は相似である．

$b < c$ の場合，接弦定理より ∠SBA = ∠SAC となる．他については同様である．　（証明終）

相似な図形の面積比は，相似比の 2 乗なので，△SAB : △SCA = AB : CA = $\boldsymbol{c^2 : b^2}$.

(2) △SAB の底辺を BS，△SCA の底辺を CS と見ると，この 2 つの三角形の高さは共通なので，BS : CS は三角形の面積比 $c^2 : b^2$ に等しい．すなわち，S は BC を $c^2 : b^2$ に外分するということになるので，

$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \dfrac{c^2\overrightarrow{\mathrm{OC}} - b^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{c^2 - b^2}$ である．　（証明終）

(3) (2) と同様にすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \frac{c^2\overrightarrow{\mathrm{OC}} - a^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{c^2 - a^2}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OU}} = \frac{a^2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - b^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a^2 - b^2}$$

である．

$$
\begin{aligned}
&x\overrightarrow{\mathrm{OS}}+y\overrightarrow{\mathrm{OT}}+z\overrightarrow{\mathrm{OU}}\\
&=x\left(\frac{c^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}-b^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{c^2-b^2}\right)+y\left(\frac{c^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}-a^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{c^2-a^2}\right)+z\left(\frac{a^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-b^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a^2-b^2}\right)\\
&=a^2\left(\frac{-1}{c^2-a^2}y+\frac{1}{a^2-b^2}z\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\
&\quad+b^2\left(\frac{-1}{c^2-b^2}x+\frac{-1}{a^2-b^2}z\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\
&\quad+c^2\left(\frac{1}{c^2-b^2}x+\frac{1}{c^2-a^2}y\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}
\end{aligned}
$$

であるので，$(x,\ y,\ z)=\boldsymbol{(c^2-b^2,\ a^2-c^2,\ b^2-a^2)}$ ならば，これが $\overrightarrow{0}$ となる．

$\boxed{\text{注釈}}$

もちろん，$(x,\ y,\ z)$ の組は一意でない．$(x,\ y,\ z)=(b^2-c^2,\ c^2-a^2,\ a^2-b^2)$ なども可．

(4) $x+y+z=(c^2-b^2)+(a^2-c^2)+(b^2-a^2)=0.$

よって，（$b\fallingdotseq c$ より $x\fallingdotseq 0$ なので）

$$
\begin{aligned}
&x\overrightarrow{\mathrm{OS}}+y\overrightarrow{\mathrm{OT}}+(-x-y)\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow x(\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OU}})+y(\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OU}})=\overrightarrow{0}\\
&\Leftrightarrow x\overrightarrow{\mathrm{US}}+y\overrightarrow{\mathrm{UT}}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{US}}=-\frac{y}{x}\overrightarrow{\mathrm{UT}}
\end{aligned}
$$

より，S，T，U は一直線上にある．　　（証明終）

〔３〕 円周 $x^2+y^2=1$ の $x>0,\ y>0$ の部分にある弧を C とする。C 上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における C の接線を L_θ とおく。また，実数 a に対して曲線 $y=(x-a)^2-\dfrac{1}{4}$ を P_a と表す。

(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である θ に対して，L_θ が P_a に接するような a が定まることを示し，a を θ で表せ。

(2) (1) の a を表す θ の関数のグラフの概形を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で描け。

(3) P_a と接する L_θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ が存在するような a の範囲を求めよ。

解答

(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので $0<\sin\theta<1,\ 0<\cos\theta<1$ であることに注意しておく．公式により L_θ の方程式は $(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$ である．これと P_a の方程式から y を消去して整理すると $(\sin\theta)x^2+(\cos\theta-2a\sin\theta)x+\left(a^2-\dfrac{1}{4}\right)\sin\theta-1=0$. これは x の 2 次方程式であるから，この判別式を D とすると $D=0$ を満たす a が存在することを示せばよい．

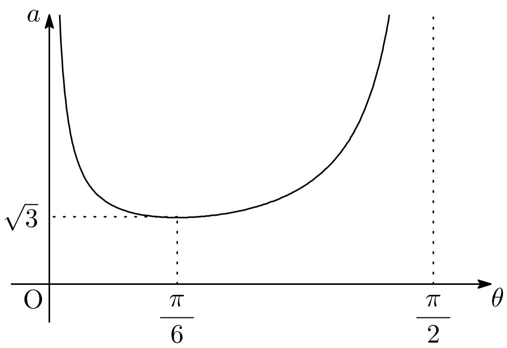
$D=(\cos\theta-2a\sin\theta)^2-4\sin\theta\left\{\left(a^2-\dfrac{1}{4}\right)\sin\theta-1\right\}=0$ から

$a=\dfrac{4\sin\theta+1}{4\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{4\sin\theta+1}{2\sin2\theta}$ となり a は確かに存在する．　（証明終）

(2) $f(\theta)=\dfrac{4\sin\theta+1}{2\sin2\theta}$ とおくと $f'(\theta)=\dfrac{(2\sin\theta-1)(2\sin^2\theta+2\sin\theta+1)}{\sin^2 2\theta}$ となる．

常に $2\sin^2\theta+2\sin\theta+1>0$ が成り立つことに注意すると $f(\theta)$ の増減およびグラフは次の通りとなる．

θ	(0)		$\dfrac{\pi}{6}$		$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
f'		$-$	0	$+$	
f	∞	↘	$\sqrt{3}$	↗	∞



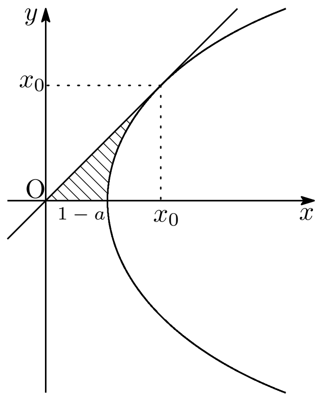
(3) (2) の結果から，$\boldsymbol{a \geqq \sqrt{3}}$.

〔4〕 $a,\ b$ を正の定数として，平面上の楕円 $\dfrac{(x-1)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を E とする。

(1) E が直線 $y=x$ と接するとき b を a で表せ。また接点の x 座標 x_0 を求めよ。

(2) E が (1) の条件を満たすとき， $x \leqq x_0$ を満たす E の部分と 2 直線 $y=x,\ y=0$ とで囲まれる図形を，x 軸の周りに回転させてできる立体の体積 V を a を用いて表せ。

$\boxed{\text{解答}}$



(1) $\dfrac{(x-1)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と $y=x$ を連立して整理すると
$(a^2+b^2)x^2-2b^2x+b^2-a^2b^2=0$．この判別式を D とすると，
$D/4=b^4-(a^2+b^2)(b^2-a^2b^2)=0$． $a>0,\ b>0$ に注意してこれを整理すると $b^2=1-a^2$． よって $\boldsymbol{b=\sqrt{1-a^2}}$． またこのときの 2 次方程式の重解は $x=\dfrac{b^2}{a^2+b^2}=1-a^2$ なので $x_0=\ \boldsymbol{1-a^2}$.

(2) 右図のようになる．V は円すいから楕円の回転体を引いて求める．

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\pi {x_0}^2\cdot x_0-\int_{1-a}^{x_0}\pi y^2\,dx \\
&= \frac{1}{3}\pi {x_0}^3-\pi\int_{1-a}^{1-a^2}\left\{1-a^2-\frac{1-a^2}{a^2}(x-1)^2\right\}dx \\
&= \frac{1}{3}\pi(1-a^2)^3-\frac{\pi(1-a^2)}{a^2}\int_{1-a}^{1-a^2}\left\{a^2-(x-1)^2\right\}dx \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi(1-a)^3(1+a)}.
\end{aligned}$$

〔5〕 はじめに袋の中に赤玉と青玉が 2 個ずつ入っている。次の試行を n 回行う。

袋の中をよくかき混ぜてから玉を 1 個取り出す。その色が赤なら手元において，青なら袋に戻す。

$n \geqq 1$ として n 回の試行の後に手元に残る赤玉の個数が 2，1，0 個である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とする。

(1) p_2，q_2，r_2 を求めよ。

(2) p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(3) $n \geqq 2$ として， p_n，q_n，r_n のそれぞれを p_{n-1}，q_{n-1}，r_{n-1} を用いて表せ。

(4) r_n を n を用いて表せ。

(5) p_n，q_n を n を用いて表せ。

解答

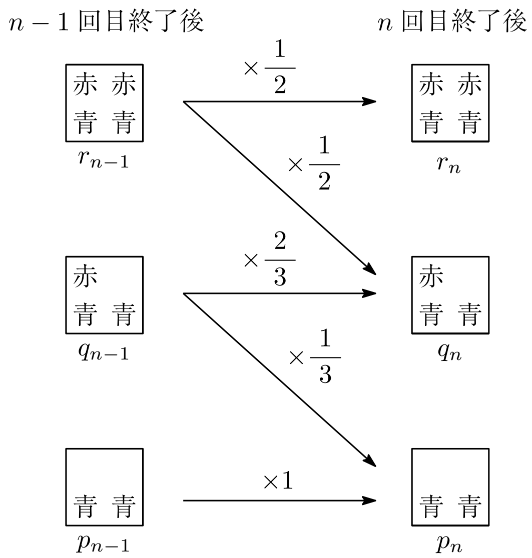
まず，最初の状態を $n = 0$ として $p_0 = 0, q_0 = 0, r_0 = 1$ と思ってもよい．次に $n \geqq 1$ のとき，

- n 回目の試行の後に手元に残る赤玉の個数が 2 個となるのは，
  - ▷ $(n-1)$ 回目の試行までで手元に赤玉がすでに 2 個あり，かつ n 回目の試行で青玉 2 個の袋の中から青玉を取り出すとき
  - ▷ $(n-1)$ 回目の試行までで手元に赤玉が 1 個であり，かつ n 回目の試行で赤玉 1 個，青玉 2 個の袋の中から赤玉を取り出すとき

  の場合がある．
- n 回目の試行の後に手元に残る赤玉の個数が 1 個となるのは，
  - ▷ $(n-1)$ 回目の試行までで手元に赤玉が 1 個であり，かつ n 回目の試行で赤玉 1 個，青玉 2 個の袋の中から青玉を取り出すとき
  - ▷ $(n-1)$ 回目の試行までで手元に赤玉が 0 個であり，かつ n 回目の試行で赤玉 2 個，青玉 2 個の袋の中から赤玉を取り出すとき

  の場合がある．
- n 回目の試行の後に手元に残る赤玉の個数が 0 個となるのは，$(n-1)$ 回目の試行までで手元に赤玉が 0 個であり，かつ n 回目の試行で赤玉 2 個，青玉 2 個の袋の中から青玉を取り出す場合である．

袋の中の玉の変化の様子は下図のようになる.



したがって，漸化式

$$\boldsymbol{p_n = p_{n-1} + \frac{1}{3}q_{n-1}, \quad q_n = \frac{2}{3}q_{n-1} + \frac{1}{2}r_{n-1}, \quad r_n = \frac{1}{2}r_{n-1}}$$

が成り立つ (これは (3) の答である).

(1) 得られた漸化式より $p_1 = 0$, $q_1 = \dfrac{1}{2}$, $r_1 = \dfrac{1}{2}$ であり，この漸化式を再び利用して $p_2 = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$, $q_2 = \boldsymbol{\dfrac{7}{12}}$, $r_2 = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ である.

(2) ここも上で得られた漸化式より $p_3 = p_2 + \dfrac{1}{3}q_2 = \boldsymbol{\dfrac{13}{36}}$, $q_3 = \dfrac{2}{3}q_2 + \dfrac{1}{2}r_2 = \boldsymbol{\dfrac{37}{72}}$, $r_3 = \dfrac{1}{2}r_2 = \boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$.

(3) 漸化式は最初に書いた通り.

(4) 数列 $\{r_n\}$ は，初項 $r_0 = 1$ ，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから $r_n = \boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

(5) (4) の結果を代入して $q_n = \dfrac{2}{3}q_{n-1} + \dfrac{1}{2}r_{n-1} = \dfrac{2}{3}q_{n-1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ となる．ここで，両辺を $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ で割ると

$$\frac{q_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{q_{n-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} \iff \left(\frac{3}{2}\right)^n q_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} q_{n-1} + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

となる．ここで， $s_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n q_n$ とおくと， $\{s_n\}$ が満たす漸化式は

$s_n = s_{n-1} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ $(n \geqq 1)$, $s_0 = 0$ であることから， $n \geqq 1$ のとき,

$$s_n = s_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 3\left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$

となる．右辺に $n=0$ を代入すると 0 となり s_0 と一致するので，

$$s_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n q_n=3\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}\ (n\geqq 0)$$

である．これより，

$$q_n=\mathbf{3}\left\{\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}}-\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}}\right\}$$

が得られる．また，

$$p_n=1-q_n-r_n=\mathbf{1-3}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}}+\mathbf{2}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}}$$

である．

講評

5 問とも標準的な問題．内容的には昨年より若干易化した．ただし，正確な論述力，計算力を必要とする問題ばかりで，どの問題も完答するのは難しい．ボーダーラインは 6 割強か．

〔1〕（標準）整数問題．場合分けは合同式を利用してスッキリやりたい．

〔2〕（標準）平面ベクトル．基本的な平面幾何の知識が必要．

〔3〕（標準）数Ⅲ微分．正確な計算力が必要．

〔4〕（標準）数Ⅲ積分．下手に計算すると (2) は大変なことになる．

〔5〕（標準）確率．漸化式との融合問題．