大阪医科大学2014年度前期入学試験　解答速報　数学

平成２６年　２月１０日　実施

[1]

$x_1=\sqrt{3},\ x_{n+1}=\dfrac{x_n}{\sqrt{1+{x_n}^2}+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1)　$x_1>0$ であり，漸化式より $x_k>0$ と仮定すると $x_{k+1}>0$ も成り立つので，帰納的に $x_n>0$ が成立する．(これを (※) とする)

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n}{\sqrt{1+{x_n}^2}+1}-x_n=\frac{-x_n\sqrt{1+{x_n}^2}}{\sqrt{1+{x_n}^2}+1}<0\quad ((※) より)$$

よって数列 $\{x_n\}$ は減少数列である．

(2)　$x_n=\tan\theta_n$ を使って漸化式を書き換えると

$$\tan\theta_{n+1}=\frac{\tan\theta_n}{\sqrt{1+\tan^2\theta_n}+1}=\frac{\sin\theta_n}{1+\cos\theta_n}=\frac{2\sin\dfrac{\theta_n}{2}\cos\dfrac{\theta_n}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta_n}{2}}=\tan\frac{\theta_n}{2}$$

ここで $0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\theta_{n+1}=\dfrac{1}{2}\theta_n$

よって θ_n は初項 $\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列なので，$\theta_n=\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n x_n=\lim_{n\to\infty}2^n\tan\theta_n=\lim_{n\to\infty}2^n\tan\left\{\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left\{\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left\{\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi\quad\left(\because\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1\right)$$

[2]

(1)

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3-3xyz&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\&=\frac{1}{2}(x+y+z)\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\}\geqq 0\ (\because x,\ y,\ z\ が正)\end{aligned}$$

が成り立つので $x^3+y^3+z^3\geqq 3xyz$ が成り立つ．(証明終)　　(等号は $x=y=z$ のときに成り立つ)

(2)　$a,\ b,\ c$ は正なので，(1) の $x^3,\ y^3,\ z^3$ を $a,\ b,\ c$ に置き換えると $a+b+c\geqq 3\sqrt[3]{abc}$ が成り立つ．よって $abc=a+b+c+2\geqq 3\sqrt[3]{abc}+2$ が成り立つので $t=\sqrt[3]{abc}$ とおくと $t^3\geqq 3t+2$ より $(t+1)^2(t-2)\geqq 0$ となる．今 $t>0$ であるから $t\geqq 2$ となり，等号は $a=b=c$ のとき成り立つので $t=\sqrt[3]{abc}$ の最小値は 2．よって abc の最小値は 8.

[3]

(1)　$\dfrac{ux}{a^2}+\dfrac{vy}{b^2}=1$

(2)　点と直線の距離の公式から垂線の長さの積は,

$$\frac{\left|\dfrac{u}{a^2}\sqrt{a^2-b^2}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{u^2}{a^4}+\dfrac{v^2}{b^4}}}\times\frac{\left|-\dfrac{u}{a^2}\sqrt{a^2-b^2}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{u^2}{a^4}+\dfrac{v^2}{b^4}}}=\frac{\left|1-\dfrac{u^2}{a^4}(a^2-b^2)\right|}{\dfrac{u^2}{a^4}+\dfrac{v^2}{b^4}}\quad\cdots ①$$

と表される．ここで，$(u,\ v)=(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とおくと,

$$(①の分子)=\left|1-\frac{(a\cos\theta)^2(a^2-b^2)}{a^4}\right|=\left|1-\cos^2\theta+\frac{b^2}{a^2}\cos^2\theta\right|=b^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)$$

$(①の分母)=\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}$ となるから，① の値は P のとり方によらず一定となり，その値は b^2 である．

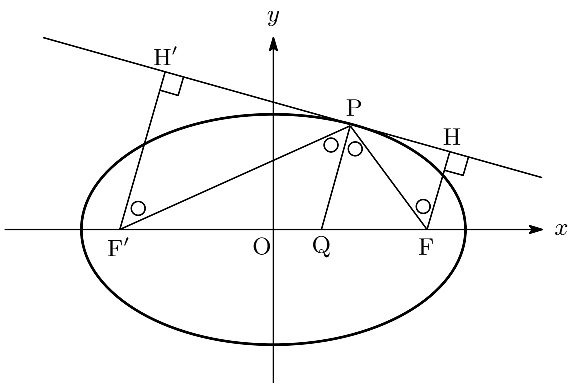
$\boxed{\text{別解}}$

$\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ とし，P における接線に F, F′ から下した垂線の足をそれぞれ H, H′ とする．いま，P における法線と x 軸の交点を Q とすると直線 PQ が $\angle\mathrm{F'PF}$ の 2 等分線になるという事実を用いて，$\angle\mathrm{F'PQ} = \angle\mathrm{FPQ} = \varphi$ とおくことにする．このとき垂線の長さの積は

$\mathrm{FH}\cdot\mathrm{F'H'} = (\mathrm{PF}\cos\varphi)\cdot(\mathrm{PF'}\cos\varphi) = \mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF'}\cos^2\varphi\ \cdots$ ②

と表すことができ，楕円の性質から $\mathrm{PF}+\mathrm{PF'} = 2a\ \cdots$ ③

が成り立つ．②, ③ を $\triangle\mathrm{F'PF}$ に対する余弦定理の式に代入して



$$
\begin{aligned}
& \mathrm{PF}^2 + \mathrm{PF'}^2 - 2\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF'}\cos 2\varphi = \mathrm{FF'}^2 \\
\iff\ & (\mathrm{PF}+\mathrm{PF'})^2 - 2\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF'}(1+\cos 2\varphi) = \left(2\sqrt{a^2-b^2}\right)^2 \\
\iff\ & 4a^2 - 4\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF'}\cos^2\varphi = 4(a^2-b^2) \\
\iff\ & 4a^2 - 4\mathrm{FH}\cdot\mathrm{F'H'} = 4(a^2-b^2) \\
\iff\ & \mathrm{FH}\cdot\mathrm{F'H'} = b^2
\end{aligned}
$$

のように導くこともできる．

[4]

(1) $x-t=s$ と置換すると， $-dt=ds$, $t: 0\to 1$ のとき $s: x\to x-1$ であるから，
$F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,dt = \int_x^{x-1} f(s)(-ds) = \int_{x-1}^{x} f(s)\,ds$ となる．いま， $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d\ (a \fallingdotseq 0)$ とおいたとき，$F(x) = kf(x)$ となったとすると，$F'(x) = kf'(x) \iff f(x)-f(x-1) = kf'(x) \iff 3ax^2+(-3a+2b)x+a-b+c = k(3ax^2+2bx+c)$ が x について恒等的に成立するので，

$$
\begin{cases}
3a = 3ka\cdots① \\
-3a+2b = 2kb\cdots② \\
a-b+c = kc\cdots③
\end{cases}
$$

が成立しなければならない．ここで，$a \fallingdotseq 0$ であるから①より $k=1$ となるが，これを②に代入すると $a=0$ になるので矛盾する．したがって，$F(x) = kf(x)$ となる実数 k と 3 次多項式 $f(x)$ は存在しない．

(2) 定義により，

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{A\cos(x-t)+B\sin(x-t)\}\,dt \\
&= \left[-A\sin(x-t)+B\cos(x-t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -A\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+B\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+A\sin x - B\cos x \\
&= (A+B)\sin x + (A-B)\cos x
\end{aligned}
$$

であるから，$F(x) = kg(x) \iff (A+B)\sin x + (A-B)\cos x = k(A\cos x - B\sin x)$ である．これが恒等的に成り立つためには

$$
\begin{cases}
A+B = -kB\cdots④ \\
A-B = kA\cdots⑤
\end{cases}
$$

が成り立たなければならない．④ $\times A +$ ⑤ $\times B$ より $A^2+2AB-B^2 = 0\cdots$⑥ がわかる．ここで，$A=0$ のとき $B=0$ となり $(A,\ B) \fallingdotseq (0,\ 0)$ に矛盾するので， $A \fallingdotseq 0$ としてよい．このとき⑥の両辺を A^2 で割ると $1+2\left(\dfrac{B}{A}\right)-\left(\dfrac{B}{A}\right)^2 = 0$ となるので，これより $\dfrac{B}{A} = 1\pm\sqrt{2}$ となる．したがって， ⑤ より $k = 1-\dfrac{B}{A} = \mp\sqrt{2}$（複号同順）となる．以上により， A と B の関係式は $A^2+2AB-B^2=0$ ，k の値は $\pm\sqrt{2}$

[5]

(1)　$(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2)$ は 1, 1, 2, 2 を並べる順列として (1, 1, 2, 2) から (2, 2, 1, 1) の $\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通りある．このうち条件を満たすものは (1, 1, 2, 2), (1, 2, 2, 1), (2, 1, 1, 2), (2, 2, 1, 1) の 4 通りなので，求める確率は $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ である．

(2)　$2n$ 枚のカードの並べ方の総数は $\dfrac{(2n)!}{(2!)^n}$ である．各並べ方に対し，$a_i=b_i$ となる i の個数を得点 X_n とする．求めたいのは $X_n=0$ となる確率である．

$X_n=0$ となる場合の数を A_n とする．(1) より $A_2=4$ であることは分かっている．

$X_3=3$ となるのは $a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$ より $3!=6$ 通り．$X_3=2$ となることはあり得ない．$X_3=1$ となるのは，どの i で $a_i=b_i$ であるかについて ${}_3\mathrm{C}_1$ 通り，その数が何であるかについて 3 通り，残りの組 $(a_j,\ b_j)$ は $a_j \fallingdotseq b_j$ で無ければならないので A_2 通り．

従って右のような表が得られ，$A_3=90-6-36=48$，求める確率は $\dfrac{48}{90}=\dfrac{8}{15}$ である．

X_3	場合の数
3	$3!=6$
2	0
1	${}_3\mathrm{C}_1\times 3\times A_2=36$
0	A_3
計	$\dfrac{6!}{(2!)^3}=90$

(3)　(2) と同じように考える．総数は $\dfrac{8!}{(2!)^4}=2520$ である．

$X_4=4$ なるのは $4!=24$ 通り，$X_4=3$ となることはない．

$X_4=2$ となるのは $a_i=b_i$ を満たす 2 組を決め，その数を決め，残り 2 組を 0 点にする場合の数なので，${}_4\mathrm{C}_2\times 4\times 3\times A_2=288$ 通り．

$X_4=1$ となるのは $a_i=b_i$ を満たす 1 組を決め，その数を決め，残り 3 組を 0 点にする場合の数なので，${}_4\mathrm{C}_1\times 4\times A_3=768$ 通り．

従って $A_4=2520-24-288-768=1440$ 通りであり，求める確率は $\dfrac{1440}{2520}=\dfrac{4}{7}$.

X_4	場合の数
4	$4!=24$
3	0
2	${}_4\mathrm{C}_2\times 4\times 3\times A_2=288$
1	${}_4\mathrm{C}_1\times 4\times A_3=768$
0	A_4
計	$\dfrac{8!}{(2!)^4}=2520$

[講評]

昨年度より少々難化した．どの問題も何かしら難しい部分があり完答するのは容易ではない．

1 漸化式と極限（標準）

(2) がポイント．$\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$ の変形に気が付くかどうか．(2) を突破できれば (3) は易しい．

2 最大最小（標準）

(2) で (1) をうまく使えるかがポイント．とは言えよくある式変形なので，この問題は完答したいところ．

3 楕円（標準）

方針自体にあまり迷うところはない．単純計算で完答まで持って行けるが，なかなかタフな計算力が必要となる．

4 数 III 積分（標準〜やや難）

3 と同様方針であまり迷うところはない．ただかなりタフな計算力が必要となる．

5 確率（やや難）

なかなか難しい問題だが，(1)，(2) は具体的に数え上げていっても何とかなる．(3) は手強い．

1, **2**, **3**, **4** で２題完答したいところ．残りの問題も半答以上で仕上げたい．難度は少し上がったが，受験生が増加したことも考慮に入れて，昨年同様６割５分〜７割がボーダーとなるだろう．

医歯学部進学予備校　メビオ

〒 540–0033　大阪市中央区石町　2–3–12　ベルヴォア天満橋

TEL 06–6946–0109　FAX 06–6941–9416　URL http://www.mebio.co.jp/