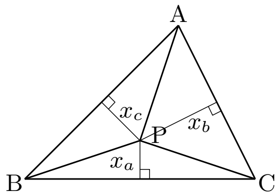
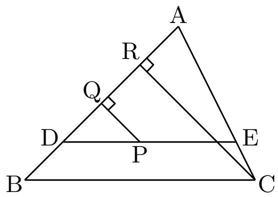
大阪医科大学2013年度前期入学試験　解答速報　数学

平成２５年　２月１０日　実施

[1]





(1)　$\triangle$ ABC の面積を S とすると，$S=\dfrac{ah_a}{2}=\dfrac{bh_b}{2}=\dfrac{ch_c}{2}$.

$\therefore\ ah_a=bh_b=ch_c$.

(2)　(1) より $a=\dfrac{2S}{h_a}$，$b=\dfrac{2S}{h_b}$，$c=\dfrac{2S}{h_c}$ だから，

図より，$S=\dfrac{1}{2}(ax_a+bx_b+cx_c)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2Sx_a}{h_a}+\dfrac{2Sx_b}{h_b}+\dfrac{2Sx_c}{h_c}\right)$

$\therefore\ \dfrac{x_a}{h_a}+\dfrac{x_b}{h_b}+\dfrac{x_c}{h_c}=1$ となり一定であるとわかる.

(3)　点 P を通り BC に平行な直線と辺 AC の交点を E とする.

$\triangle$ADE $\backsim$ $\triangle$ABC で，その相似比は $h_a-x_a:h_a$.

よって AD : DB $=h_a-x_a:x_a$.

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{x_a}{h_a}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(1-\dfrac{x_a}{h_a}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

(4)　点 P, C から辺 AB に下した垂線の足を Q, R とする.

$\triangle$BCR $\backsim$ $\triangle$DPQ で，BC : DP $=$ CR : PQ $=h_c:x_c$ だから，$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\dfrac{x_c}{h_c}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\dfrac{x_c}{h_c}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{x_a}{h_a}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(1-\dfrac{x_a}{h_a}-\dfrac{x_c}{h_c}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{x_c}{h_c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{x_a}{h_a}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{x_b}{h_b}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{x_c}{h_c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$.

従って $k=\dfrac{x_a}{h_a}$，$l=\dfrac{x_b}{h_b}$，$m=\dfrac{x_c}{h_c}$. ((2) より $k+l+m=1$ は満たされている.)

[2]

(1)　正の数 c が有理数であると仮定する．すると，$c=\dfrac{l}{k}$ (ただし k, l は互いに素な自然数) とおける．ここで，$c^2=c+1$ より $\dfrac{l^2}{k^2}=\dfrac{l}{k}+1$，両辺 k 倍して $\dfrac{l^2}{k}=l+k$ が得られる．右辺が整数であることから，$\dfrac{l^2}{k}$ も整数となり，k, l 互いに素であることから $k=1$ と決まる．すなわち c は整数となってしまう.

ところが，$c^2=c+1$ を実際に解くと $c=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ が得られ，$2<\sqrt{5}<3$ から $\dfrac{3}{2}<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<2$. すなわち c は整数となることはない.

以上から c は無理数であると言える.

(2)　数学的帰納法で示す.

(i)　$n=1$ のときは $a_1=1$，$b_1=0$ が存在する.

(ii)　$n=k$ のとき $c^k=a_kc+b_k$ をみたす整数 a_k，b_k が存在すると仮定すると，

$$
\begin{aligned}
c^{k+1} &= c^kc\\
&= a_kc^2+b_kc\\
&= a_k(c+1)+b_kc\\
&= (a_k+b_k)c+a_k
\end{aligned}
$$

となり，整数 $a_{k+1}=a_k+b_k$，$b_{k+1}=a_k$ が存在する.

以上 (i)(ii) から題意は示された.

(3)　c^n を消去して整理すると $(a_n-a'_n)c=-b_n+b'_n$ となる．ここで $a_n-a'_n\fallingdotseq 0$ と仮定すると $c=-\dfrac{b_n-b'_n}{a_n-a'_n}$ となるがこの右辺は有理数であるから c が無理数であることに矛盾する．よって $a_n-a'_n=0$ となるので $a_n=a'_n$，$b_n=b'_n$ が成り立つ.

(4)　数学的帰納法で示す.

(i) $m=1$ のときは明らかに成立する.

(ii) $m=k$ のとき a_{kn} が a_n の倍数であると仮定する. $m=k+1$ のとき,

$$\begin{aligned} c^{(k+1)n} &= c^{kn}c^n \\ &= (a_{kn}c+b_{kn})(a_nc+b_n) \\ &= a_{kn}a_nc^2+(a_{kn}b_n+a_nb_{kn})c+b_{kn}b_n \\ &= a_{kn}a_n(c+1)+(a_{kn}b_n+a_nb_{kn})c+b_{kn}b_n \\ &= (a_{kn}a_n+a_{kn}b_n+a_nb_{kn})c+a_{kn}a_n+b_{kn}b_n \end{aligned}$$

よって (3) の事実から $a_{(k+1)n}=a_{kn}a_n+a_{kn}b_n+a_nb_{kn}$ と一意に決まり, 仮定から $a_{(k+1)n}$ は a_n の倍数となることが分かる.

以上 (i)(ii) から題意は示された.

[3]

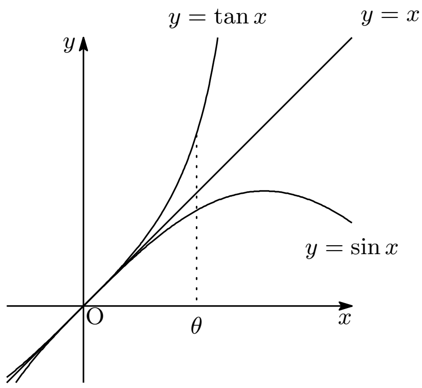
(1) ① $f(\theta)=(\text{中辺})-(\text{左辺})=\log\cos\theta-\left(\dfrac{-\theta^2}{2}\dfrac{1}{\cos\theta}\right)$ とする. $f'(\theta)=\dfrac{-\sin\theta+\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\theta^2}{2}\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ となる.

ここで $\underline{g(\theta)=-\sin\theta+\theta}_{\text{(A)}}$ とすると, $g'(\theta)=-\cos\theta+1>0$ より, $g(\theta)$ は単調増加となり, $g(\theta)>g(0)=0$ なので, $f'(\theta)>0$ がわかる. したがって $f(\theta)>f(0)=0$ から $\dfrac{-\theta^2}{2}\dfrac{1}{\cos\theta}<\log\cos\theta$ が成り立つ.

② $h(\theta)=(\text{右辺})-(\text{中辺})=\dfrac{-\theta^2}{2}-\log\cos\theta$ とする. $\underline{h'(\theta)=-\theta+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}_{\text{(B)}}$, $h''(\theta)=-1+\dfrac{1}{\cos^2\theta}>0$ より $h'(\theta)$ は単調増加であり, $h'(\theta)>h'(0)=0$ から $h(\theta)$ も単調増加となる.

したがって, $h(\theta)>h(0)=0$ となり, $\log\cos\theta<\dfrac{-\theta^2}{2}$ が成り立つ.

注 ：下線部 (A), (B) に関しては右図グラフの上下関係から簡単に示すのもよいだろう.



(2) (1) の不等式の θ の部分に $\dfrac{\theta}{n}$ を代入すると $-\dfrac{\theta^2}{2n^2\cos\frac{\theta}{n}}<\log\cos\dfrac{\theta}{n}<-\dfrac{\theta^2}{2n^2}$

この両辺を n 倍して $-\dfrac{\theta^2}{2n\cos\frac{\theta}{n}}<\log\left(\cos\dfrac{\theta}{n}\right)^n<-\dfrac{\theta^2}{2n}$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\theta^2}{2n\cos\frac{\theta}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\theta^2}{2n}\right)=0$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^n=0$（はさみうちの原理）

したがって, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^n=1$

(3) 前問の不等式をさらに n 倍して利用する.

$-\dfrac{\theta^2}{2\cos\frac{\theta}{n}}<\log\left(\cos\dfrac{\theta}{n}\right)^{n^2}<-\dfrac{\theta^2}{2}$ が成り立ち, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\theta^2}{2\cos\frac{\theta}{n}}\right)=-\frac{\theta^2}{2}$ なので,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^{n^2}=-\frac{\theta^2}{2}$ （はさみうちの原理）. すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^{n^2}=e^{-\frac{\theta^2}{2}}$

[4]

(1)　以下のように計算する.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sin m\pi x\sin n\pi x\,dx &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\{\cos(m+n)\pi x-\cos(m-n)\pi x\}\,dx \qquad \text{（積→和の公式を用いた）}\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)\pi x}{(m+n)\pi}-\frac{\sin(m-n)\pi x}{(m-n)\pi}\right]_{-1}^{1}\\ &= 0\end{aligned}$$

(2)　$f(x)=\sin^2 n\pi x$ とすると $f(-x)=\sin^2 n\pi(-x)=(-\sin n\pi x)^2=\sin^2 n\pi x=f(x)$ が成り立つ.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sin^2 n\pi x\,dx &= 2\int_{0}^{1}\sin^2 n\pi x\,dx \qquad \text{（被積分関数が偶関数であることから）}\\ &= 2\int_{0}^{1}\frac{1-\cos 2n\pi x}{2}\,dx\\ &= 2\left[\frac{1}{2}x-\frac{\sin n\pi x}{4n\pi}\right]_{0}^{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

(3)　$g(x)=x\sin n\pi x$ とすると $g(-x)=(-x)\sin(n\pi(-x))=x\sin n\pi x=g(x)$ が成り立つ.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}x\sin n\pi x\,dx &= 2\int_{0}^{1}x\sin n\pi x\,dx \qquad \text{（被積分関数が偶関数であることから）}\\ &= 2\left(\left[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\right]_{0}^{1}+\int_{0}^{1}\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\,dx\right)\\ &= 2\left(\left[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\right]_{0}^{1}\right)\\ &= \frac{-2\cos n\pi}{n\pi}\\ &= -\frac{2(-1)^n}{n\pi}\end{aligned}$$

(4)　(1), (2), (3) の結果を用いる.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x-f(x))^2\,dx &= \int_{-1}^{1}(x-\sum_{n=1}^{N}c_n\sin n\pi x)^2\,dx=\int_{-1}^{1}\left\{x^2-2\sum_{n=1}^{N}c_n x\sin n\pi x+\left(\sum_{n=1}^{N}c_n\sin n\pi x\right)^2\right\}dx\\ &= \int_{-1}^{1}\left(\sum_{n=1}^{N}c_n\sin n\pi x\right)^2 dx-2\sum_{n=1}^{N}c_n\int_{-1}^{1}x\sin n\pi x\,dx+\frac{2}{3}\\ &= \int_{-1}^{1}\left(\sum_{n=1}^{N}{c_n}^2\sin^2 n\pi x\right)dx+\sum c_m c_n\int_{-1}^{1}\sin m\pi x\sin n\pi x\,dx-2\sum_{n=1}^{N}c_n\int_{-1}^{1}x\sin n\pi x\,dx+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

（第 2 項の $\sum$ は $1\leqq m\leqq N,\ 1\leqq n\leqq N, m\neq n$ となるすべての $(m,\ n)$ の組にわたる和を表しているが, (1) によりこれは 0 である.）

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^{1}\left(\sum_{n=1}^{N}{c_n}^2\sin^2 n\pi x\right)dx+4\sum_{n=1}^{N}\frac{c_n(-1)^n}{n\pi}+\frac{2}{3}\\ &= \sum_{n=1}^{N}{c_n}^2+4\sum_{n=1}^{N}\frac{c_n(-1)^n}{n\pi}+\frac{2}{3}=\sum_{n=1}^{N}\left(c_n+\frac{2(-1)^n}{n\pi}\right)^2-\sum_{n=1}^{N}\frac{4}{n^2\pi^2}+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

であるから, $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-f(x))^2\,dx$ を最小にする c_n は, $c_n=\dfrac{-2(-1)^n}{n\pi}$

[5]

(1)　確率分布表は以下の通り．

k	$p(X=k)$
0	$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_4 \cdot {}_3\mathrm{C}_0}{{}_9\mathrm{C}_4} = \dfrac{15}{126} = \dfrac{5}{42}$
1	$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_4} = \dfrac{60}{126} = \dfrac{10}{21}$
2	$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_4} = \dfrac{45}{126} = \dfrac{5}{14}$
3	$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4} = \dfrac{6}{126} = \dfrac{1}{21}$

(2)　「３個の○と６個の×」の並べ替え，つまり「３個の１と６個の０」の並べ替えなので，${}_9\mathrm{C}_3 = 84$.

(3)　何本目に引いても当たる確率は $\dfrac{1}{3}$ である.

(4)　(1) の確率分布表から，

$$E(X) = \frac{15}{126}\times 0 + \frac{60}{126}\times 1 + \frac{45}{126}\times 2 + \frac{6}{126}\times 3 = \frac{4}{3}.$$

(※ これは $E(X) = E(Y_1)+E(Y_2)+E(Y_3)+E(Y_4)$
$= \dfrac{1}{3}\times 4$ を求めていることに他ならない．)

医歯学部進学予備校　メビオ
〒 540–0033　大阪市中央区石町　2–3–12　ベルヴォア天満橋
TEL 06–6946–0109　FAX 06–6941–9416　URL http://www.mebio.co.jp/