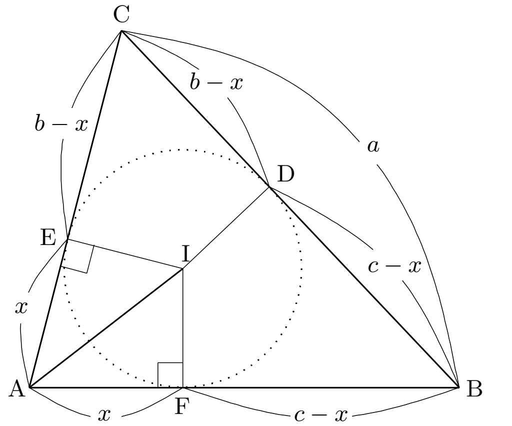
大阪医科大学（後期）　2012年度入学試験　解答速報　数学

平成２４年　３月１０日　実施

[1]

(1)　$\triangle$AIE と $\triangle$AIF において，$\angle \mathrm{AEI} = \angle \mathrm{AFI} = 90^\circ$，AI が共通，IE $=$ IF なので，直角三角形における斜辺と他の一辺相等より $\triangle \mathrm{AIE} \equiv \triangle \mathrm{AIF}$．よって $\mathrm{AE} = \mathrm{AF}$．(証明終)



(2)　$\mathrm{AE} = \mathrm{AF} = x$ とおくと $\mathrm{CE} = \mathrm{CD} = b - x$，$\mathrm{BF} = \mathrm{BD} = c - x$ であるから $a = b - x + c - x$ より $x = \mathrm{AE} = \dfrac{-a+b+c}{2}$．

(3)　$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とおくとヘロンの公式から

$\triangle \mathrm{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$．

また $\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} r(a+b+c) = rs$ であるから

$$r = \frac{1}{s}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}.$$

(4)　三平方の定理から $\mathrm{AI}^2 = \mathrm{AE}^2 + r^2 = \left(\dfrac{-a+b+c}{2}\right)^2 + \dfrac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)}$

$$= \frac{-a+b+c}{4}\left\{-a+b+c+\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}\right\} = \frac{-a+b+c}{4}\cdot\frac{-a^2+(b+c)^2+a^2-(b-c)^2}{a+b+c}$$

$$= \frac{bc(-a+b+c)}{a+b+c}. \quad \text{よって } \mathrm{AI} = \sqrt{\frac{bc(-a+b+c)}{a+b+c}}.$$

【別解】一般に $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}$ なのでこの大きさを 2 乗してもよい．この際 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が必要となるが $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさを 2 乗することにより $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ と分かる．

[2]

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \iff \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-2s,\ 1+4s,\ -1+2s+2t)$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \sqrt{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 3\sqrt{3}$ であることに注意しておく．

(1)　$\angle \mathrm{AOP} = \angle \mathrm{BOP}$ より，$\cos\angle \mathrm{AOP} = \cos\angle \mathrm{BOP} \iff \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}$

$\iff (3\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0 \iff (4,\ -2,\ -4)\cdot(1-2s,\ 1+4s,\ -1+2s+2t) = 0 \iff 12s + 4t = 3 \cdots$①．

(2)　$\angle \mathrm{AOP} = \angle \mathrm{COP}$ より，$\cos\angle \mathrm{AOP} = \cos\angle \mathrm{COP} \iff \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}$

$\iff (\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0 \iff (0,\ 0,\ -2)\cdot(1-2s,\ 1+4s,\ -1+2s+2t) = 0 \iff 2s + 2t = 1 \cdots$②．

①，② を解いて，$s = \dfrac{1}{8}$，$t = \dfrac{3}{8}$ となるので，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{2},\ 0\right)$．

[3]

(1) $f_n(x)=e^{-x}\left(e^x f_{n-1}(x)+e^x f'_{n-1}(x)\right)=f_{n-1}(x)+f'_{n-1}(x)$.

(2) $f_1(x)=f_0(x)+f'_0(x)$,

$f_2(x)=f_1(x)+f'_1(x)=f_0(x)+2f'_0(x)+f''_0(x)$,

$f_3(x)=f_2(x)+f'_2(x)=f_0(x)+3f'_0(x)+3f''_0(x)+f'''_0(x)$

などから $f_n(x)={}_n\mathrm{C}_0 f_0(x)+{}_n\mathrm{C}_1 f'_0(x)+{}_n\mathrm{C}_2 f''_0(x)+{}_n\mathrm{C}_3 f'''_0(x)\ \cdots$ (∗) $(n\geqq 3)$ と予想できる．

以下数学的帰納法により証明する．

・$n=3$ のときは成り立っている．

・$n=k$ $(k\geqq 3)$ のとき (∗) の成立を仮定する．このとき

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= f_k(x)+f'_k(x) \\ &= {}_k\mathrm{C}_0 f_0(x)+{}_k\mathrm{C}_1 f'_0(x)+{}_k\mathrm{C}_2 f''_0(x)+{}_k\mathrm{C}_3 f'''_0(x) \\ &\quad +\left({}_k\mathrm{C}_0 f'_0(x)+{}_k\mathrm{C}_1 f''_0(x)+{}_k\mathrm{C}_2 f'''_0(x)+{}_k\mathrm{C}_3 f''''_0(x)\right) \\ &= {}_{k+1}\mathrm{C}_0 f_0(x)+{}_{k+1}\mathrm{C}_1 f'_0(x)+{}_{k+1}\mathrm{C}_2 f''_0(x)+{}_{k+1}\mathrm{C}_3 f'''_0(x) \end{aligned}$$

（${}_{k+1}\mathrm{C}_0={}_k\mathrm{C}_0=1$，${}_{k+1}\mathrm{C}_l={}_k\mathrm{C}_l+{}_k\mathrm{C}_{l-1}$，$f''''_0(x)=0$ に注意しておく）

以上から 3 以上の整数 n に対して (∗) が成り立つことが分かった．

また，$f_n(x)$ を $f_n(x)=f_0(x)+nf'_0(x)+\dfrac{n(n-1)}{2!}f''_0(x)+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}f'''_0(x)$ と書き直せば $n=0,\ 1,\ 2$ のときも成り立つことが分かる．以上より 0 以上の整数に対して，

$f_n(x)=f_0(x)+nf'_0(x)+\dfrac{n(n-1)}{2}f''_0(x)+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}f'''_0(x)$ である．

【別解】$f_n(x)-f_{n-1}(x)=f'_{n-1}(x)$ から，$f_n(x)=f_0(x)+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f'_k(x)\ \cdots$ ① である．また，① の両辺を微分していくと，

$$f'_n(x)=f'_0(x)+\sum_{k=0}^{n-1}f''_k(x)\ \cdots\ ②$$

$$f''_n(x)=f''_0(x)+\sum_{k=0}^{n-1}f'''_k(x)\ \cdots\ ③$$

$$f'''_n(x)=f'''_0(x)+\sum_{k=0}^{n-1}f''''_k(x)=f'''_0(x)$$ （∵ $f_n(x)$ は 3 次式なので 4 階微分は 0 となる）

以下，③，②，① に順に代入していく．

$$f''_n(x)=f''_0(x)+\sum_{k=0}^{n-1}f'''_0(x)=f''_0(x)+nf'''_0(x)$$

$$f'_n(x)=f'_0(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f''_0(x)+kf'''_0(x)\right\}=f'_0(x)+nf''_0(x)+\frac{n(n-1)}{2}f'''_0(x)$$

$$\begin{aligned} f_n(x)&=f_0(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f'_0(x)+kf''_0(x)+\frac{k(k-1)}{2}f'''_0(x)\right\} \\ &=f_0(x)+nf'_0(x)+\frac{n(n-1)}{2}f''_0(x)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}f'''_0(x) \end{aligned}$$

のように，順に $f''_n(x)$，$f'_n(x)$，$f_n(x)$ を求めることもできる．

(3)　$f_2(x) = x^3 + 6x^2 + 6x$ より，$f_2(x) = 0$ は $x = 0,\ -3 \pm \sqrt{3}$ の 3 解を持つ．

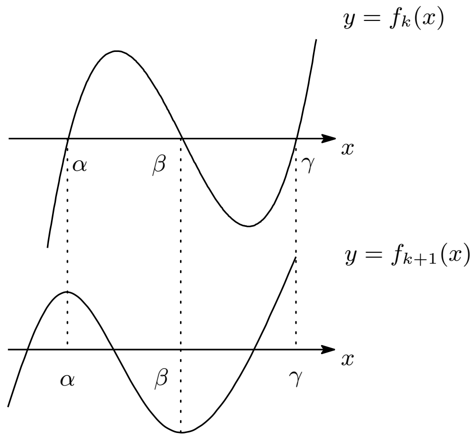
ここで，$f_k(x) = 0$ $(k \geqq 2)$ が異なる 3 解を持つことを仮定する．この 3 解を $x = \alpha,\ \beta,\ \gamma$ $(\alpha < \beta < \gamma)$ とする．このとき，$y = f_k(x)$ のグラフを考えれば（右上図）$f_k'(\alpha) > 0,\ f_k'(\beta) < 0,\ f_k'(\gamma) > 0$ となる．このとき，

$f_{k+1}(\alpha) = f_k(\alpha) + f_k'(\alpha) = f_k'(\alpha) > 0$

$f_{k+1}(\beta) = f_k(\beta) + f_k'(\beta) = f_k'(\beta) < 0$

$f_{k+1}(\gamma) = f_k(\gamma) + f_k'(\gamma) = f_k'(\gamma) > 0$

となることから $y = f_{k+1}(x)$ のグラフも，x 軸と 3 回交わっていることがわかる（右下図）．すなわち，$f_{k+1}(x) = 0$ は異なる 3 解を持つ．



以上，数学的帰納法により 2 以上のすべての整数に対して，$f_n(x) = 0$ は異なる 3 解を持つことが示された．

【別解１】　(2) の結果から $f_n(x) = x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)$ である．従って，$f_n'(x) = 3x^2 + 6nx + 3n(n-1)$ となる．$f_n'(x) = 0$ の判別式を D とすると，$D/4 = (3n)^2 - 3 \cdot 3n(n-1) = 9n > 0$ より，$f_n'(x) = 0$ は異なる 2 解を持つ．この 2 解を $x = \alpha,\ \beta$ とおく．

$f_n(x)$ は $x = \alpha,\ \beta$ で極大値，極小値を持つ．極値の積を計算すると $f_n(\alpha) \cdot f_n(\beta) = -4n^2(n-1) < 0$ がわかるので，$f_n(x) = 0$ は異なる 3 解を持つといえる．

【別解２】　$f_n(x) = x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)$ より $f_n(-n) = 2n > 0,\ f_n(-n+1) = -n+1 < 0$ が分かる．$f_n(x)$ の x^3 の係数は正だから，中間値の定理より $f_n(x) = 0$ の解が 3 つだといえる．

[4]

(1)　$\displaystyle\int_0^1 (x-a)(x-b)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a+b}{2} \cdot x^2 + abx\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{a+b}{2} + ab = 0$ より $b = \dfrac{3a-2}{6a-3}$　$\left(a \fallingdotseq \dfrac{1}{2}\right)$.

(2)　$a \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$ を考慮して $\dfrac{3a-2}{6a-3} \geqq a$ を解くと $a < \dfrac{1}{2}$．また，$\dfrac{3a-2}{6a-3} \leqq 1$ を解くと $a \leqq \dfrac{1}{3},\ a > \dfrac{1}{2}$.

これと $a \geqq 0$ より a の範囲は $0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}$.

(3)　$\displaystyle\int_0^a (x-a)(x-b)\,dx = S_1,\ \int_a^b -(x-a)(x-b)\,dx = S_2,\ \int_b^1 (x-a)(x-b)\,dx = S_3$ とする．題意より $S_1 + S_3 = S_2$

なので (左辺) $\displaystyle= \int_0^1 |(x-a)(x-b)|\,dx = S_1 + S_2 + S_3 = 2S_2 = -2\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx =$ (右辺).

(4)　(3) より 題意をみたすとき，$S_2 = \dfrac{1}{6}(b-a)^3$ が最小となるので，$b - a$ が最小になるときを考えればよい．

$f(a) = b - a = \dfrac{3a-2}{6a-3} - a$ とおくと，$f'(a) = \dfrac{1}{3(2a-1)^2} - 1$．これより増減表は次の様になる．

a	0	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	最小	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$

従って $f(a)$ が極小かつ最小となる a の値は $a = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$.

[5]

(1)　n 個のさいころの目が全て 2 以上になる確率なので，$\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

(2)　n 個のさいころの目が全て 5 以下になる場合の余事象なので，$1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

(3)　n 個のさいころの目が全て 1 にならない事象を A，n 個のさいころの目が全て 6 にならない事象を B とすると，求める確率 は，

$$P(\overline{A\cup B})=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}=1-2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

講評

[1] は誰もが一度は解いたことがあるであろう問題．[2] も基本的.

[3] は大変難しい．ある事実に気付けば帰納法でスマートに解けるのだが，気付かなくとも計算に持ち込んで解くことが出来る．ただし，次数下げを使わないと計算力は相当必要となる.

[4] も計算に持ち込む問題．誘導に従って，分数関数をいとわず，微分で最小値を求めればよい．[5] はベン図的発想があれば難しくはない.

[1][2][5] は落とせない．[4] を完答近くまで仕上げて [3] でどれだけもぎ取るかである．全体として 7.5 割～8 割が合格ラインと思われる.

医歯学部進学予備校　メビオ

〒 540–0033　大阪市中央区石町　2–3–12　ベルヴォアア天満橋

TEL 06–6946–0109　FAX 06–6941–9416　URL http://www.mebio.co.jp/

MeBio Scholastics