2025 年 11 月 15 日実施

久留米大学医学部〈数学〉推薦入試

ズバリ的中

医学部進学予備校 メビオ

格子点の個数に関する出題

3. n を自然数とする．座標平面上において，不等式

$$x>0,\ y>0,\ \log_3\frac{y}{x}\leqq x\leqq n$$

を満たす格子点（x, y 座標がともに整数である点）の個数を S_n とする．

(1) 与えられた不等式を満たす格子点のうち，直線 $x=k$ 上にある格子点の個数を k を用いて表せ．ただし，k は $1\leqq k\leqq n$ を満たす整数とする．

(2) S_n を求めよ．

解答

(1) $k\cdot 3^k$　(2) $\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\right)\cdot 3^{n+1}$

解説

(1) 直線 $x=k\ (1\leqq k\leqq n)$ のとき，

$$\log_3\frac{y}{k}\leqq k\iff 1\leqq y\leqq k\cdot 3^k$$

である．よって，$x=k$ 上の格子点の個数は，$\boldsymbol{k\cdot 3^k}$ **個**である．

(2) (1) より $S_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 3^k$ である．

$$\begin{aligned}S_n&=1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots\qquad\quad +n\cdot 3^n &\cdots ①\\ 3S_n&=\qquad\ \ 1\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots+(n-1)\cdot 3^n+n\cdot 3^{n+1}&\cdots ②\end{aligned}$$

① − ② より，

$$\begin{aligned}-2S_n&=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot 3^{n+1}\\&=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\cdot 3^{n+1}\\&=\frac{3^{n+1}-3}{2}-n\cdot 3^{n+1}\\&=-\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}-n\right)\cdot 3^{n+1}\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\boldsymbol{S_n=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\right)\cdot 3^{n+1}}$$

である．

❶ まず x=k 上の格子点を数える！

❷ その後、その総和を求める！

（等差）×（等比）の和の求め方が同じ！

2025年10月実施

【メビオ 久留米大学医学部 推薦対策講座テキスト】より

問題　n を自然数とするとき，次の不等式をみたす格子点の個数をそれぞれ求めよ．

(1) $y\leqq x^2,\ y\geqq -x,\ 0\leqq x\leqq n$

(2) $|x|+|y|\leqq n$

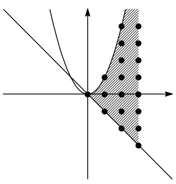
(3) $\log_2 x\leqq y\leqq 9$

解答

(1) k を整数として，直線 $x=k\ (0\leqq k\leqq n)$ 上には格子点は $k^2-(-k)+1$ 個あるので，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\{k^2-(-k)+1\}\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}+n+1\\&=\boldsymbol{\frac{1}{3}(n+1)(n^2+2n+3)}\end{aligned}$$

である．



問題　数列の和 $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)2^{-k}$ を n で表せ．

解答

求める和を S_n とおくと，

$$\begin{aligned}S_n&=1\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2^2}+5\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+(2n-1)\cdot\frac{1}{2^n}&\cdots ①\\ \frac{1}{2}S_n&=\qquad\ 1\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+(2n-3)\cdot\frac{1}{2^n}+(2n-1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}&\cdots ②\end{aligned}$$

① − ② より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n&=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+2\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+2\cdot\frac{1}{2^n}-(2n-1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\\&=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-(2n-1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\\&=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

となるので，$S_n=\boldsymbol{3-\frac{2n+3}{2^n}}$ である．

コメント

久留米大学医学部推薦型選抜の数学で、格子点の個数の問題が出題されました。実はこの問題、まずｘ＝ｋ 上の点の個数を求めてから総和をとるという解法まで、対策授業で扱った問題と完全に一致しています。さらに、ポイントとなる「（等差）×（等比）」の計算までも、同じ日の授業で扱いました。授業に出席した受験生は、かなり有利に解き進められたはずです。

試験直前に演習！

※試験問題、模試問題とも掲載用にレイアウトを多少変更しています