2026年2月1日実施

久留米大学医学部〈数学〉

ズバリ的中

医学部進学予備校 メビオ

斜軸回転の体積を求める出題

5. a を正の定数とする。放物線 $C: y=-x^2+ax$ 上に点 $\mathrm{P}(p,\ -p^2+ap)\ (0<p<a)$ がある。原点と点 P を通る直線を l_1，点 P における放物線 C の接線を l_2 とする。

(1) l_1 と l_2 が直交するような p の値がただひとつに定まるような a の値は，$a=\boxed{は}\sqrt{\boxed{ひ}}$ であり，そのとき

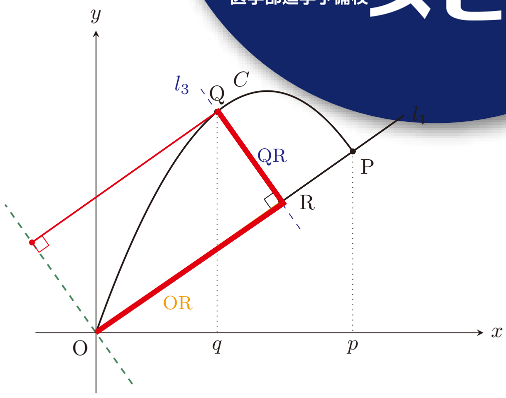
$p=\dfrac{\boxed{ふ}}{\sqrt{\boxed{へ}}}$ である。以下，$a=\boxed{は}\sqrt{\boxed{ひ}}$，$p=\dfrac{\boxed{ふ}}{\sqrt{\boxed{へ}}}$ のときについて考える。

(2) 放物線上の点 $\mathrm{Q}(q,\ -q^2+aq)\ (0\leqq q\leqq p)$ を通り，l_1 に垂直な直線を l_3 とする。l_3 と l_1 の交点を R とするとき，$\mathrm{QR}=\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{ほ}}}\left(\boxed{ま}q-\sqrt{\boxed{み}}q^2\right)$，$\mathrm{OR}=\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{む}}}\left(\boxed{め}\sqrt{\boxed{も}}q-q^2\right)$ である。

(3) 放物線 C と直線 l_1 で囲まれた領域を D とする。QR を半径とする円の面積は

$\dfrac{\pi}{3}\left(\boxed{や}q^2-\boxed{ゆ}\sqrt{\boxed{よ}}q^3+\boxed{ら}q^4\right)$ であるから，領域 D を直線 l_1 の周りに 1 回転してできる回転体の

体積は $\dfrac{\boxed{りる}\sqrt{\boxed{れ}}}{\boxed{ろわ}}\pi$ である。



解答

(2) 前問より，$C: y=-x^2+2\sqrt{2}x$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}},\ \dfrac{3}{2}\right)$，$l_1: y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ である．QR の長さは，点 $\mathrm{Q}(q,\ -q^2+2\sqrt{2}q)$ と $l_1: -x+\sqrt{2}y=0$ との距離なので，

$$\mathrm{QR}=\frac{|-q+\sqrt{2}(-q^2+2\sqrt{2}q)|}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2})^2}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}(3q-\sqrt{2}q^2)}\ \left(\because 0\leqq q\leqq\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$ である．

また，原点を通り l_1 に直交する直線の方程式は $\sqrt{2}x+y=0$ であり，この直線と点 Q との距離が OR に等しいので，

$$\mathrm{OR}=\frac{|\sqrt{2}q+(-q^2+2\sqrt{2}q)|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}(3\sqrt{2}q-q^2)}\ \left(\because 0\leqq q\leqq\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

(3) QR を半径とする円の面積は，

$$\pi\mathrm{QR}^2=\pi\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(3q-\sqrt{2}q^2)\right\}^2=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}\left(9q^2-6\sqrt{2}q^3+2q^4\right)}$$ である．

求める回転体の体積は，OR の長さを t とおくと，$\dfrac{dt}{dq}=\dfrac{3\sqrt{2}-2q}{\sqrt{3}}$ より，

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\pi\mathrm{QR}^2\,dt$$
$$=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}q^2(3-\sqrt{2}q)^2\cdot\frac{3\sqrt{2}-2q}{\sqrt{3}}\,dq$$
$$=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}q^2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-q\right)^3dq$$

変数変換の過程も同じ！

【メビオ 久留米大学医学部 前期対策講座テキスト】より

2025年12月27日
2026年1月13日 実施

問題 2–1–2　xy 平面上に曲線 $C\colon y=x^2-x\ (0\leqq x\leqq 2)$ がある．
C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-t)$ から直線 $l: y=x$ に下ろした垂線と l との交点を H とする．

(1) 線分 PH の長さを t を用いて表せ．

(2) O を原点とするとき，線分 OH の長さを t を用いて表せ．

(3) C と l で囲まれた部分を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

曲線上の点からの２つの距離を出す過程が同じ！

解答

(1) PH の長さは点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-t)$ から直線 $y=x \iff x-y=0$ までの距離であるから

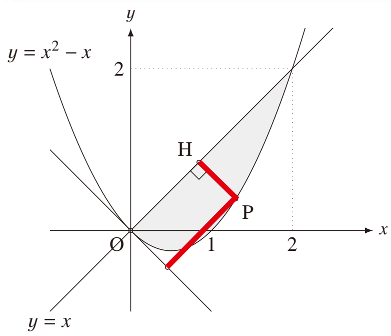
$$\mathrm{PH}=\frac{|t-(t^2-t)|}{\sqrt{2}}=\frac{|t(2-t)|}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{t(2-t)}{\sqrt{2}}}\quad(\because 0\leqq t\leqq 2)$$

(2) 直線 PH は傾きが -1 であるから，その方程式は

$$y=-(x-t)+t^2-t=-x+t^2$$

である．これと直線 $y=x$ との交点 H の座標は $\mathrm{H}\left(\dfrac{t^2}{2},\ \dfrac{t^2}{2}\right)$ であるから，

$$\mathrm{OH}=\sqrt{\left(\frac{t^2}{2}\right)^2+\left(\frac{t^2}{2}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{t^2}{\sqrt{2}}}$$ である．



別解

OH の長さは点 P から直線 $y=-x \iff x+y=0$ までの距離であるから　$\mathrm{OH}=\dfrac{|t+(t^2-t)|}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}}$

(3) $\mathrm{OH}=\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}=s$ とおくと，$0\leqq s\leqq 2\sqrt{2}$ であり，$\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{2}t$，$\begin{array}{c|c} s & 0\to 2\sqrt{2} \\ \hline t & 0\to 2 \end{array}$ であるから，

求める体積は

$$\int_0^{2\sqrt{2}}\pi\mathrm{PH}^2\,ds=\pi\int_0^2\mathrm{PH}^2\cdot\frac{ds}{dt}\,dt$$
$$=\pi\int_0^2\left\{\frac{t(2-t)}{\sqrt{2}}\right\}^2\cdot\sqrt{2}t\,dt$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^2 t^3(t-2)^2\,dt$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^2(t^5-4t^4+4t^3)\,dt$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\left[\frac{1}{6}t^6-\frac{4}{5}t^5+t^4\right]_0^2$$
$$=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi}$$ である．

使いこなせるのであれば，ベータ関数を用いて

$$V=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^2 t^3(t-2)^2\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\cdot\frac{3!2!}{6!}\cdot 2^6=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi}$$ と求めるのがよい．

コメント

久留米大学医学部前期の数学で、斜軸回転体の体積を求める問題が出題されました。この問題では、曲線上の点 Q から回転軸に下ろした垂線 QR の長さと、線分 OR の長さを求めさせ、それらを使って回転体の体積を求める流れになっています。メビオでは、12/27 の久留米大学医学部攻略講座、および 1/13 に久留米大学医学部対策の授業で、全く同じ流れの問題を扱いました。典型問題ではあるものの、本番直前に改めてこの流れを確認できた受験生は、自信をもってこの問題に取り組めたことでしょう。

試験直前に演習！

※試験問題、模試問題とも掲載用にレイアウトを多少変更しています