2024 年 2 月 10 日実施

大阪医科薬科大学〈数学〉

ズバリ的中 医学部進学予備校 メビオ

漸化式で表された数列の極限に関する出題

〔1〕

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{2a_n + 5}{a_n + 2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対し，$a_n \geqq 2$ であることを示せ。

(2) ある自然数 n に対して，$a_n < \sqrt{5}$ ならば $a_{n+1} > \sqrt{5}$，
また，$a_n > \sqrt{5}$ ならば $a_{n+1} < \sqrt{5}$ であることを示せ。

(3) すべての自然数 n に対し，

$$|a_{n+1} - \sqrt{5}| \leqq \frac{\sqrt{5} - 2}{4}|a_n - \sqrt{5}|$$

であることを示せ。

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

はさみうちの原理を用いて極限を求める

数学的帰納法を用いて一般項の範囲について証明する

【メビオ 大医直前授業】より

＼ 試験前日！ ／
2024年2月9日実施

数列がある値へ近づいていくことを証明

数列 $\{a_n\}$ は

$$0 < a_1 < 3,\quad a_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすものとする．

(1) すべての自然数 n に対して，$0 < a_n < 3$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して，$3 - a_n \leqq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3 - a_1)$ が成り立つことを示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ となることを示せ．

コメント

漸化式で表された数列で、一般項を求めることなく極限を求める問題です。数列がある値へ近づくことを示し、それを繰り返し用いることによりはさみうちの原理を用いて極限を求めます。慣れないとどのように考えればよいか戸惑いそうですが、前日に同じ種類の問題を経験したことで、メビオ生はアドバンテージを得ました。

試験直前に演習！

※試験問題、模試問題とも掲載用にレイアウトを多少変更しています

医学部進学予備校 メビオ