

ズバリの中!

2020年度 近畿大学医学部[前期] 入試問題

2020年1月26日実施

数学

試験
2日前

3 次の問いに答えよ。必要なら $\log_{10} 2 = 0.30103$, $\log_{10} 3 = 0.47712$, $\log_{10} 7 = 0.84510$ を用いる。

- (1) $2020!$ の末尾に並ぶ0の個数を求めよ。
- (2) 3^{2020} の桁数および先頭の数字を求めよ。
- (3) 3^{2020} の下3桁を求めよ。

2020年1月24日実施 入試直前授業(メビオ実施)

問題 2019^{2019} の一の位の数字および十の位の数字を求めよ。

解法1

二項定理を用いると、

$$\begin{aligned} 3^{2020} &= 9^{1010} \\ &= (10 - 1)^{1010} \\ &= {}_{1010}C_0 - {}_{1010}C_1 \cdot 10 + {}_{1010}C_2 \cdot 10^2 - {}_{1010}C_3 \cdot 10^3 + \dots \\ &= 1 - {}_{1010}C_1 \cdot 10 + \frac{{}_{1010}C_2 \cdot 100 - {}_{1010}C_3 \cdot 1000}{2} + \dots \end{aligned}$$

となるので、

二項定理を用いるという解法を知っていれば、
下3桁を求める問題でも同じ解法で解ける。

解法1

二項定理を用いると、

$$2019^{2019} = (2020 - 1)^{2019}$$

$$= -{}_{2019}C_0 + {}_{2019}C_1 \cdot 2020 - {}_{2019}C_2 \cdot 2020^2 + \dots$$

$$= -1 + 2019 \cdot 2020 + 1009500 \cdot 2020^2 - \dots$$

$$2019^{2019} \equiv -1 + 2019 \pmod{100}$$

$$\equiv -1 + 19 \cdot 20 \pmod{100}$$

$$\equiv 379 \pmod{100}$$

$$\equiv 79 \pmod{100}$$

直前の授業で
バッチリ
予習!

より 3^{2020} の下3桁は 401 である。

解法2

まず、

$$3^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{8}$$

より

$$3^{2020} \equiv (3^2)^{1010} \equiv 1 \pmod{8}$$

である。また、

$$3^5 \equiv 243 \equiv -7 \pmod{125}$$

$$3^{10} \equiv (-7)^2 \equiv 49 \pmod{125}$$

$$3^{20} \equiv 49^2 \equiv (50 - 1)^2 \equiv 2500 - 100 + 1 \equiv -99 \equiv 26 \pmod{125}$$

$$3^{40} \equiv 26^2 \equiv (25 + 1)^2 \equiv 625 + 50 + 1 \equiv 51 \pmod{125}$$

$$3^{50} \equiv 51 \cdot 49 \equiv (50 + 1)(50 - 1) \equiv 2500 - 1 \equiv -1 \pmod{125}$$

より

$$3^{2020} \equiv (3^{50})^40 \cdot 3^{20} \equiv (-1)^{40} \cdot 26 \equiv 26 \pmod{125}$$

であるが、125を法として26と合同なのは、

$$26, 151, 276, 401, \dots$$

であり、 $401 \equiv 1 \pmod{8}$ なので、 $3^{2020} \equiv 401 \pmod{1000}$ である(中国人の剰余定理)。したがって、 3^{2020} の下3桁は 401 である。

解法2

まず

$$2019 \equiv -1 \pmod{4}$$

より

$$2019^{2019} \equiv (-1)^{2019} \equiv -1 \pmod{4}$$

である。また、

$$2019 \equiv -6 \pmod{25}$$

$$2019^2 \equiv (-6)^2 \equiv 36 \equiv 11 \pmod{25}$$

$$2019^3 \equiv -6 \cdot 11 \equiv -66 \equiv 9 \pmod{25}$$

$$2019^4 \equiv -6 \cdot 9 \equiv -54 \equiv -4 \pmod{25}$$

$$2019^5 \equiv (-6) \cdot (-4) \equiv 24 \equiv -1 \pmod{25}$$

より

$$2019^{2019} \equiv (2019^5)^{403} \cdot 2019^4 \equiv (-1)^{403} \cdot (-4) \equiv 4$$

であるが、25を法として4と合同なのは、

$$4, 29, 54, 79$$

であり、 $79 \equiv -1 \pmod{4}$ なので $2019^{2019} \equiv 79 \pmod{100}$ である(中国人の剰余定理)。したがって、 2019^{2019} の一の位は 9、十の位は 7 である。

また、合同式を用いた解法でも
同じ考え方で解くことができる。

入試問題
ズバリの中!

医学部進学予備校

メビオ

<https://www.mebio.co.jp/>

☎ 0120-146-156

☎ 携帯からOK 受付時間 9~21時 土日祝可

大阪市中央区石町2-3-12ベルヴォア天満橋