医学部進学予備校
メビオ
医学部専門予備校 YMS × 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

久留米大学医学部(推薦)　数学

2025年 11月 15日実施

1.　等式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ を考える．

(1)　$0<x\leqq y\leqq z$ のとき，

①　x の値をすべて求めよ．

②　自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ．

(2)　(1) の条件を考えない場合，

①　自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ のうち，$x,\ y,\ z$ の 3 つの数字がすべて異なる組の個数を答えよ．

②　自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ．

解答

(1) ① 2，3，4　② 8 個　(2) ① 30 個　② 39 個

解説

(1)　①　$0<x\leqq y\leqq z$ より，$\dfrac{1}{x}\geqq\dfrac{1}{y}\geqq\dfrac{1}{z}>0$ であるので，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{1}{x}<\frac{2}{3}\leqq\frac{3}{x}\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{3}{2}<x\leqq\frac{9}{2}\end{aligned}$$

となる．x は自然数であるので，$x=\mathbf{2,\ 3,\ 4}$ である（②の議論より，確かに $x=2,\ 3,\ 4$ のときに解は存在する）．

② • $x=2$ のとき，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6}$ であるので，変形すると，$(y-6)(z-6)=36$ となる．$-4\leqq y-6\leqq z-6$ であるのでこれを満たす整数は $(y-6,\ z-6)=(1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9),\ (6,\ 6)$ つまり $(x,\ y,\ z)=(2,\ 7,\ 42),\ (2,\ 8,\ 24),\ (2,\ 9,\ 18),\ (2,\ 10,\ 15),\ (2,\ 12,\ 12)$ の 5 個存在する．

• $x=3$ のとき，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$ であるので，変形すると，$(y-3)(z-3)=9$ となる．$0\leqq y-3\leqq z-3$ であるのでこれを満たす整数は $(y-3,\ z-3)=(1,\ 9),\ (3,\ 3)$ つまり $(x,\ y,\ z)=(3,\ 4,\ 12),\ (3,\ 6,\ 6)$ の 2 個存在する．

• $x=4$ のとき，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{12}$ であるので，変形すると，$(5y-12)(5z-12)=144$ となる．$8\leqq 5y-12\leqq 5z-12$ であり，$5y-2$ の 1 の位が 3 または 8 であることを考慮すると，これを満たす整数は $(5y-12,\ 5z-12)=(8,\ 18)$ つまり $(x,\ y,\ z)=(4,\ 4,\ 6)$ のみ存在する．

以上より条件を満たす $(x,\ y,\ z)$ の組の個数は全部で **8** 個存在する．

$\boxed{\text{別解}}$

$x=4$ のときについては，(1) ①と同様に絞り込みで処理をしてもよい．

$$\begin{aligned} & \frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y}+\frac{1}{y} \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{5}{12} \leqq \frac{2}{y} \\ \Longleftrightarrow\ & y \leqq \frac{24}{5} \end{aligned}$$

であるので $y \geqq x=4$ であることと合わせて，$y=4$ を得る．このとき $z=6$ である．

(2) ① 3 つの組の数字がすべて異なるものは $(2,\ 7,\ 42)$, $(2,\ 8,\ 24)$, $(2,\ 9,\ 18)$, $(2,\ 10,\ 15)$, $(3,\ 4,\ 12)$ の 5 組あり，それぞれ $(x,\ y,\ z)$ の並びが $3!=6$ 通りずつあるので，$5 \times 6 = \mathbf{30}$ 個存在する．

② 3 つの組の数字のうち 2 つ一致するものは $(2,\ 12,\ 12)$, $(3,\ 6,\ 6)$, $(4,\ 4,\ 6)$ の 3 組あり，それぞれ $(x,\ y,\ z)$ の並びが $\dfrac{3!}{2!}=3$ 通りずつあるので，$3 \times 3 = 9$ 個存在する．①と合わせて全部で $30+9=\mathbf{39}$ 個存在する．

2. 曲線 C : $y=-x^3+2kx$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ -p^3+2kp)$ における接線 ℓ が，点 P と異なる点 Q で曲線 C と交わり，点 Q における接線が直線 ℓ と直交している．ただし，k は実数，p は 0 ではない実数とする．

(1) 以下の文中の空欄 $\boxed{\text{①}}$ ～ $\boxed{\text{④}}$ に入る数式を p と k を用いて表せ．

接線 ℓ の方程式は $y=\boxed{\text{①}}x+\boxed{\text{②}}$ であり，点 Q の座標は $(\boxed{\text{③}},\ \boxed{\text{④}})$ である．

(2) (1) のとき，k のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) $p=1$ とし，曲線 C と接線 ℓ で囲まれた領域のうち $y\geqq 0$ の部分の面積を S とする．点 Q の y 座標が 0 以上のとき $S=\boxed{\text{①}}$ であり，負のとき $S=\boxed{\text{②}}$ である．この空欄 $\boxed{\text{①}}$ と $\boxed{\text{②}}$ に入る数式を k を用いて表せ．

解答

(1) ① $(-3p^2+2k)$　② $2p^3$　③ $-2p$　④ $8p^3-4kp$

(2) $k\geqq\dfrac{2}{3}$

(3) ① $\dfrac{27}{4}-k^2$　② $\dfrac{2}{2k-3}+\dfrac{3}{4}$

解説

(1) $y'=-3x^2+2k$ より，点 $\mathrm{P}(p,\ -p^3+2kp)$ における接線 ℓ の方程式は，

$$\begin{aligned} y&=(-3p^2+2k)(x-p)-p^3+2kp\\ &=\boldsymbol{(-3p^2+2k)}x+\boldsymbol{2p^3}\end{aligned}$$

である．また，これと $y=-x^3+2kx$ を連立すると，

$$(-3p^2+2k)x+2p^3=-x^3+2kx$$

$$x^3-3p^2x+2p^3=0$$

$$(x-p)^2(x+2p)=0$$

となるので，点 Q の座標は $\boldsymbol{(-2p,\ 8p^3-4kp)}$ である．

別解

点 Q の x 座標を q とおくと，この 3 次方程式の解と係数の関係より $p+p+q=0$ となるので，$q=-2p$ が得られる．

(2) 点 Q における接線の傾きは，$-12p^2+2k$ となるので，題意より

$$(-3p^2+2k)(-12p^2+2k)=-1$$

$$36p^4-30kp^2+4k^2+1=0$$

が成り立つ．$p^2=P$ とおくと，P の 2 次方程式

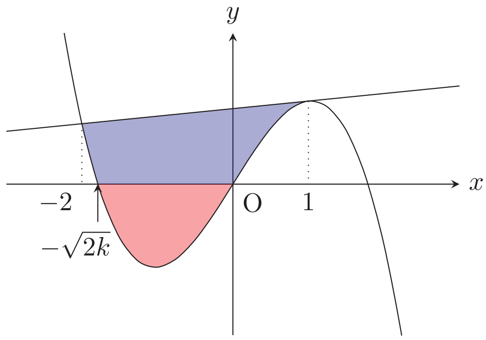
$$36P^2-30kP+4k^2+1=0$$

が，正の解をもつ条件を求めればよい．この左辺を $f(P)$ とおき，判別式を D とおくと，軸が $P=\dfrac{5}{12}k$ であることと，$f(0)>0$ であることより，$f(P)=0$ が正の解をもつ条件は，$\dfrac{5}{12}k>0$ かつ $D\geqq 0$ である．

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=225k^2-36(4k^2+1)\\ &=9(9k^2-4)\end{aligned}$$

となるので，求める条件は $\boldsymbol{k \geqq \dfrac{2}{3}}$ である．

(3)　(i)　点 Q の y 座標が正のとき，求める面積は下図の青で塗られた部分の面積である．



赤と青を合わせた部分の面積は，

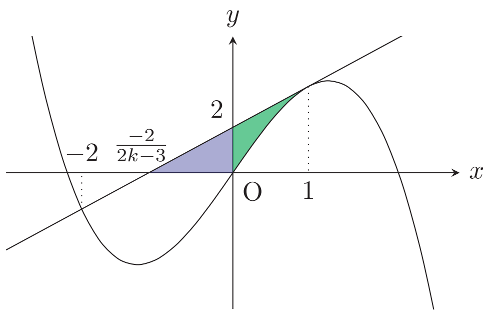
$$
\begin{aligned}
&\int_{-2}^{1} \{(-3p^2+2k)x+2p^3-(-x^3+2kx)\}\,dx \\
&= \frac{1}{12}(1+2)^4 \\
&= \frac{27}{4}
\end{aligned}
$$

であり，赤で塗られた部分の面積は，

$$
\begin{aligned}
&-\int_{-\sqrt{2k}}^{0}(-x^3+2kx)\,dx \\
&= -\left[-\frac{x^4}{4}+kx^2\right]_{-\sqrt{2k}}^{0} \\
&= k^2
\end{aligned}
$$

となるので，求める面積は，$\boldsymbol{\dfrac{27}{4}-k^2}$ である．

(ii)　点 Q の y 座標が負のとき，求める面積は下図の青と緑の部分を合わせた部分の面積である．



青い部分の面積は，

$$
\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2k-3}\cdot 2 = \frac{2}{2k-3}
$$

であり，緑の部分の面積は，

$$
\begin{aligned}
&\int_{0}^{1}\{(2k-3)x+2-(-x^3+2kx)\}\,dx \\
&= \int_{0}^{1}(x^3-3x+2)\,dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{0}^{1} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

であるので，求める面積は $\boldsymbol{\dfrac{2}{2k-3}+\dfrac{3}{4}}$ である．

注釈

点 Q の y 座標は $8-4k$ であるが，(2) の議論より，k は $4k^2-30k+37=0$ の解であるので，$k=\dfrac{15\pm\sqrt{77}}{4}$ である．$k=\dfrac{15-\sqrt{77}}{4}$ のとき点 Q の y 座標は正となり，$k=\dfrac{15+\sqrt{77}}{4}$ のとき点 Q の y 座標は負となる．当然，k を用いた S の表し方は一意とはならない．

3. n を自然数とする．座標平面上において, 不等式

$$x>0,\ y>0,\ \log_3 \frac{y}{x} \leqq x \leqq n$$

を満たす格子点（x, y 座標がともに整数である点）の個数を S_n とする．

(1) 与えられた不等式を満たす格子点のうち，直線 $x=k$ 上にある格子点の個数を k を用いて表せ．ただし，k は $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする．

(2) S_n を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $k\cdot 3^k$ (2) $\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{1}{2}n-\dfrac{1}{4}\right)\cdot 3^{n+1}$

$\boxed{\text{解説}}$

(1) 直線 $x=k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ のとき，

$$\log_3 \frac{y}{k} \leqq k \iff 1 \leqq y \leqq k\cdot 3^k$$

である．よって，$x=k$ 上の格子点の個数は，$\boldsymbol{k\cdot 3^k}$ **個**である．

(2) (1) より $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^k$ である．

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \cdots \quad\quad + n\cdot 3^n \qquad\qquad \cdots ① \\ 3S_n = & \qquad\quad 1\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + \cdots + (n-1)\cdot 3^n + n\cdot 3^{n+1} \quad \cdots ② \end{array}$$

① − ② より，

$$\begin{aligned} -2S_n &= 3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot 3^{n+1} \\ &= \frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\cdot 3^{n+1} \\ &= \frac{3^{n+1}-3}{2}-n\cdot 3^{n+1} \\ &= -\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}-n\right)\cdot 3^{n+1} \end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\boldsymbol{S_n=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\right)\cdot 3^{n+1}}$$

である．

4. 時刻 0 において，2 つの動点が正四面体 ABCD の頂点 A に位置している．これらの動点は独立に運動し，それぞれ 1 秒ごとに，隣の頂点に等確率で移動していくとする．たとえば，ある時刻で点 D にいる動点は，その 1 秒後には点 A，B，C のいずれかに，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する．この 2 つの動点が，時刻 0 から n 秒後に同じ点にいる確率を p_n とする．ただし，n は自然数とする．

(1) p_1，p_2 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(3) p_n を求めよ．

解答

(1) $p_1=\dfrac{1}{3}$，$p_2=\dfrac{7}{27}$

(2) $p_{n+1}=\dfrac{1}{9}p_n+\dfrac{2}{9}$

(3) $p_n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{9}\right)^n$

解説

(1) 1 秒後に 2 つの動点が同じ点に位置しているのは，2 点とも B，C，D にいるときなので，

$$p_1=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 3=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

2 秒後に 2 つの動点が同じ点に位置しているのは，次の場合がある．

(i) 1 秒後に 2 つの動点が同じ点に位置しているとき，

$$p_1\times\frac{1}{3}$$

(ii) 1 秒後に 2 つの動点が異なる点に位置しているときを考える．

例えば，2 つの動点がそれぞれ頂点 A，B にいる状態で，次の 1 秒で 2 点とも C に移動する確率は，$\dfrac{1}{9}$ なので，D に移動して一致する場合も考えて，

$$(1-p_1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 2=\frac{2}{9}(1-p_1)$$

(i),(ii) より

$$\begin{aligned}p_2&=\frac{1}{3}p_1+\frac{2}{9}(1-p_1)\\&=\frac{1}{9}+\frac{4}{27}\\&=\mathbf{\frac{7}{27}}\end{aligned}$$

(2) (1) の (ii) と同様に考えると，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}(1-p_n)\iff \boldsymbol{p_{n+1}=\frac{1}{9}p_n+\frac{2}{9}}$$

(3) (2) で求めた漸化式を式変形すると，次のようになる．

$$p_{n+1}=\frac{1}{9}p_n+\frac{2}{9}\iff p_{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{9}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$$

よって,

$$p_n - \frac{1}{4} = \left(p_1 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \iff \boldsymbol{p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^{n}}$$

講評

1. ［整数］（標準）

定番の不定方程式の問題であった．絞り込んだ自然数 x が 3 個あるため，解答のみを書く試験であることを考慮すると，それぞれ丁寧に計算して確実に合わせたい．(1) ②さえ突破できれば (2) は易しいのでこの大問は取り切りたい．

2. ［数学 II 微積分］（やや難）

3 次関数と接線に関する問題であった．題材としては典型題であるが，文字 k を含むため処理力が問われた．(2) では条件式から解答のように 2 次式とみなして解の存在範囲として処理できたかどうかで差がついただろう．(3) は難しいが $\frac{1}{12}$ 公式や三角形の面積を用いてうまく計算をしたいところである．

3. ［数列］（やや易）

格子点の個数である．(1) は与えられた不等式を変形して指数の式に直せるかがポイント．(2) は「(等差数列) × (等比数列)」の和を求める問題であり，典型題なので落とせない．

4. ［確率・数列］（標準）

2 つの点が正四面体の頂点を移動して，同じ点にある確率を考える問題である．(1) は 1 秒後，2 秒後に同じ点にある確率を求める問題であり，ここは完答したい．p_2 を求める際には漸化式を意識して立式したい．(2) ができれば (3) は正答したいので，(2) の出来で差が付くだろう．なお，p_n を求めたら，p_1，p_2 が正しいかどうかの確認はしておきたい．

昨年度はかなり難易度の高い問題が並んでいたが，本年度は典型題が並び，取り組みやすいセットになった．大問 3 と大問 4 のどちらかを完答し，大問 1 と大問 2 でどれだけ立ち回れたかの勝負になるだろう．制限時間が 60 分と短いことも考慮して，目標点は 55% .