解答速報

久留米大学医学部（後期）　数学

2026年 3月 8日実施

1.　1辺の長さが1の正四面体 OABC と1つの面を共有する正四面体 DABC がある。O と D は異なる点である。OB の中点を M，BD を $3:1$ に内分する点を N とする。点 M を通り，三角形 OAC に平行な面と AB，AD，CD，CB との交点を，順に P，Q，R，S とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{c}$ である。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{a}$ であるから，SQ//OA である。

(3)　五角形 MPQRS の面積は $\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセ}}\sqrt{\boxed{ソ}}$ であり，五角錐 N − MPQRS の体積は $\dfrac{\boxed{タチ}\sqrt{\boxed{ツ}}}{768}$ である。

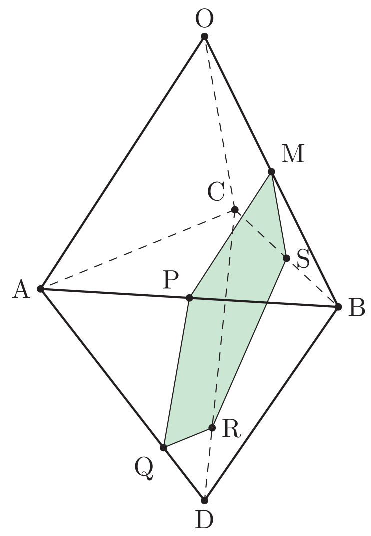
解答

解答記号	正解
$\dfrac{ア}{イ}$, $\dfrac{ウ}{エ}$, $\dfrac{オ}{カ}$	$\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2}{3}$
$\dfrac{キ}{ク}$	$\dfrac{3}{4}$
$\dfrac{ケ}{コ}$	$\dfrac{3}{4}$
$\dfrac{サシ}{スセ}\sqrt{ソ}$	$\dfrac{13}{64}\sqrt{3}$
$タチ\sqrt{ツ}$	$13\sqrt{2}$

解説

(1)　三角形 ABC の重心を G とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{a}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{b}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{c}$$



(2)　P は線分 AB の中点であるので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \dfrac{-\vec{a}+\vec{b}}{2}$.

また，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくと，

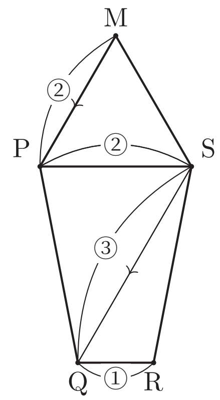
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= k(\overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\\ &= -\frac{1}{3}k\vec{a} + \frac{2}{3}k\vec{b} + \frac{2}{3}k\vec{c}\end{aligned}$$

これより $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}k\right)\vec{a} + \left(\dfrac{2}{3}k - \dfrac{1}{2}\right)\vec{b} + \dfrac{2}{3}k\vec{c}$ を得る．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は平面 OAC に平行であるので，$\vec{b}$ の係数が 0 となればよい．すなわち，

$$\frac{2}{3}k - \frac{1}{2} = 0 \iff k = \frac{3}{4}$$

となるので，$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| = \dfrac{3}{4}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$.

また，S は線分 BC の中点であるので，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{3}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$.
これより $\overrightarrow{\mathrm{SQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OS}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}\vec{a}$ が得られる．



(3)　三角形 MPS の面積を T とする．(2) の結果より，MP と SQ は平行であり，

$$\mathrm{MP} : \mathrm{SQ} = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = 2 : 3$$

であるから，三角形 PQS の面積は $\dfrac{3}{2}T$ である．また PS と QR は平行であり，

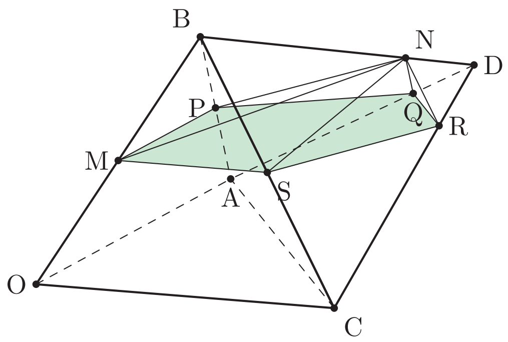
$$\mathrm{PS} : \mathrm{QR} = \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2 : 1$$

であるから，三角形 SQR の面積は $\dfrac{3}{4}T$ である．

したがって， 五角形 MPQRS の面積は

$$\begin{aligned}T + \frac{3}{2}T + \frac{3}{4}T = \frac{13}{4}T &\\ &= \frac{13}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi}{3}\\ &= \boldsymbol{\frac{13\sqrt{3}}{64}}\end{aligned}$$

である．



B から三角形 OAC に下ろした垂線の足を H とすると，H は三角形 OAC の外心である．正弦定理から

$$2\mathrm{OH} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} \iff \mathrm{OH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

これより $\mathrm{BH} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ である．

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ において，それぞれの $\vec{b}$ の係数を考えることにより MPQRS を底面とする五角錐の高さは $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{BH} = \frac{1}{4}\mathrm{BH} = \frac{\sqrt{6}}{12}$ であることがわかるので，五角錐 N-MPQRS の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{13\sqrt{3}}{64}\cdot\frac{\sqrt{6}}{12} = \boldsymbol{\frac{13\sqrt{2}}{768}}$$

となる．

2. 3^n を 2 進法で表したときの桁数を a_n，5 進法で表したときの桁数を b_n とする。n を自然数とし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ として，次の問いに答えよ。

(1) $\log_2 3 = \boxed{テ}.\boxed{トナニ}$，$\log_5 3 = \boxed{ヌ}.\boxed{ネノハ}$ である。ただし，いずれも小数第 4 位を四捨五入して，小数第 3 位まで答えよ。

(2) $a_{20} + b_{20} = \boxed{ヒフ}$ である。

(3) $a_n - b_n = 10$ となる n は，$n = \boxed{ヘホ}$ である。

解答

解答記号	正解
テ. トナニ	1.585
ヌ. ネノハ	0.683
ヒフ	46
ヘホ	11

解説

3^n を 2 進法で表したときの桁数が a_n，5 進法で表したときの桁数が b_n であるから，これらはそれぞれ

$$2^{a_n - 1} \leqq 3^n < 2^{a_n} \iff n\log_2 3 < a_n \leqq n\log_2 3 + 1 \cdots ①$$

$$5^{b_n - 1} \leqq 3^n < 5^{b_n} \iff n\log_5 3 < b_n \leqq n\log_5 3 + 1 \cdots ②$$

を満たす整数である.

(1) $\log_2 3 = \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \dfrac{0.4771}{0.3010} = 1.585049\cdots$ より，$\log_2 3 = \mathbf{1.585}$ である．また，$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$ だから，$\log_5 3 = \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} = \dfrac{0.4771}{0.6990} = 0.682546\cdots$ より，$\log_5 3 = \mathbf{0.683}$ である.

(2) (1) の結果から,

$$① \iff n \times 1.585 < a_n \leqq n \times 1.585 + 1 \cdots ①'$$

$$② \iff n \times 0.683 < b_n \leqq n \times 0.683 + 1 \cdots ②'$$

となる．$n = 20$ のとき,

$$①' \text{より } 31.7 < a_{20} \leqq 32.7 \quad \therefore a_{20} = 32$$

$$②' \text{より } 13.66 < b_{20} \leqq 14.66 \quad \therefore b_{20} = 14$$

となる．したがって，$a_{20} + b_{20} = 32 + 14 = \mathbf{46}$ である.

(3) ②$'$ から

$$-n \times 0.683 - 1 \leqq -b_n < -n \times 0.683$$

となるので，これと ①$'$ を辺々加えることにより

$$n \times 0.902 - 1 < a_n - b_n < n \times 0.902 + 1$$

$$\iff a_n - b_n - 1 < n \times 0.902 < a_n - b_n + 1$$

が成り立つことが必要とわかる．これより $a_n - b_n = 10$ のとき $9 < n \times 0.902 < 11$ となり，これを満たす n は $n = 10,\ 11,\ 12$ に限られる．

$n = 10$ のとき，

$$①' \text{より } 15.85 < a_{10} \leqq 16.85 \quad \therefore a_{10} = 16$$

$$②' \text{より } 6.83 < b_{10} \leqq 7.83 \quad \therefore b_{10} = 7$$

となる．したがって，$a_{10} - b_{10} = 16 - 7 = 9$ となり不適.

$n = 11$ のとき，

$$①' \text{より } 17.435 < a_{11} \leqq 18.435 \quad \therefore a_{11} = 18$$

$$②' \text{より } 7.513 < b_{11} \leqq 8.513 \quad \therefore b_{11} = 8$$

となる．したがって，$a_{11} - b_{11} = 18 - 8 = 10$ となり適する.

$n = 12$ のとき，

$$①' \text{より } 19.02 < a_{12} \leqq 20.02 \quad \therefore a_{12} = 20$$

$$②' \text{より } 8.196 < b_{12} \leqq 9.196 \quad \therefore b_{12} = 9$$

となる．したがって，$a_{12} - b_{12} = 20 - 9 = 11$ となり不適.

以上から，$n = \mathbf{11}$ である.

別解

n を 1 大きくすると, a_n の値は 1 大きくなるか 2 大きくなるのいずれかであり, b_n の値は変わらないか 1 大きくなるのいずれかである．このことから，n を大きくしたとき $a_n - b_n$ が小さくなることはない．すなわち，n を 1 ずつ大きくするにつれ $a_n - b_n$ の値は変わらないか大きくなるのいずれかである.

$10\log_2 3 = 15.85,\ 10\log_5 3 = 6.83$ と①，②より，$a_{10} = 16,\ b_{10} = 7$ であり, $a_{10} - b_{10} = 9$ である.

$$11\log_2 3 = 17.435,\ 11\log_5 3 = 7.513, 12\log_2 3 = 19.02, 12\log_5 3 = 8.196$$

であるから，同様にして $a_{11} = 18,\ b_{11} = 8,\ a_{11} - b_{11} = 10$ と $a_{12} = 20,\ b_{12} = 9,\ a_{12} - b_{12} = 11$ がわかる.

最初の議論より n を 1 ずつ大きくするにつれ $a_n - b_n$ の値は変わらないか増加するので，$1 \leqq n \leqq 10,\ 12 \leqq n$ で $a_n - b_n = 10$ となることはない．以上より，$a_n - b_n = 10$ を満たす n は $n = \mathbf{11}$ である.

3.　2 つの自然数 $p,\ q\ (p>q)$ について，$\alpha=\sqrt{p}+\sqrt{q},\ \beta=\sqrt{p}-\sqrt{q}$ を考える。$a_n=\alpha^n+\beta^n$ とするとき，以下の問いに答えよ。

　ただし，$\boxed{ム}$，$\boxed{モ}$，$\boxed{ユ}$，$\boxed{ヨ}$，$\boxed{リ}$ には，次の選択肢から適当なものを選んで番号で答えよ。同じ番号を何回選んでもよい。

① p　② q　③ $p+q$　④ $p-q$
⑤ $2p+q$　⑥ $p+2q$　⑦ $3p+q$　⑧ $p+3q$

(1)　$a_1=\boxed{マ}\sqrt{p},\ a_2=\boxed{ミ}\left(\boxed{ム}\right)$，$a_3=\boxed{メ}\sqrt{p}\left(\boxed{モ}\right)$ である。

(2)　$a_{2n-1}=\sqrt{p}b_n,\ a_{2n}=c_n$ とおく。$b_{n+1}=\boxed{ヤ}c_n-\left(\boxed{ユ}\right)b_n,\ c_{n+1}=\left(\boxed{ヨ}\right)c_n-\boxed{ラ}\boxed{リ}\left(\boxed{ユ}\right)b_n$ である。

(3)　$p=5,\ q=3$ のとき，α^{2026} の 1 の位の数は $\boxed{ル}$ である。

解答

解答記号	正解
マ，ミ (ム)，メ (モ)	2，2(③)，2(⑧)
ヤ，ユ	2，④
ヨ，ラリ	⑦，2 ①
ル	5

解説

(1)　$\alpha=\sqrt{p}+\sqrt{q},\ \beta=\sqrt{p}-\sqrt{q}$ より，$\alpha+\beta=2\sqrt{p},\ \alpha\beta=p-q$ であることに注意する．

$$a_1=\alpha^1+\beta^1=\mathbf{2}\sqrt{p}$$

$$\begin{aligned}a_2&=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(2\sqrt{p})^2-2(p-q)=\mathbf{2(p+q)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_3&=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\\&=2\sqrt{p}\{2(p+q)-(p-q)\}=\mathbf{2}\sqrt{p}(\boldsymbol{p+3q})\end{aligned}$$

(2)　$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$ より，数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2}=2\sqrt{p}a_{n+1}-(p-q)a_n\cdots(*)$$

を満たす．まず，$(*)$ の n に $2n-1$ を代入すると

$$\begin{aligned}&a_{2n+1}=2\sqrt{p}a_{2n}-(p-q)a_{2n-1}\\\iff\ &\sqrt{p}b_{n+1}=2\sqrt{p}c_n-(p-q)\sqrt{p}b_n\end{aligned}$$

この式の両辺を $\sqrt{p}$ で割ることで

$$b_{n+1}=\mathbf{2}c_n-(\boldsymbol{p-q})b_n\cdots(\bigstar)$$

を得る．次に，$(*)$ の n に $2n$ を代入すると

$$\begin{aligned}&a_{2n+2}=2\sqrt{p}a_{2n+1}-(p-q)a_{2n}\\\iff\ &c_{n+1}=2\sqrt{p}(\sqrt{p}b_{n+1})-(p-q)c_n\end{aligned}$$

$$= 2pb_{n+1} - (p-q)c_n$$

ここに先の b_{n+1} の結果 (★) を代入して

$$c_{n+1} = 2p\{2c_n - (p-q)b_n\} - (p-q)c_n$$
$$= (\boldsymbol{3p+q})c_n - \boldsymbol{2p}(p-q)b_n$$

を得る．

(3)　$p=5,\ q=3$ を代入すると，(2) で求めた漸化式は次のようになる．

$$\begin{cases} b_{n+1} = 2c_n - 2b_n \\ c_{n+1} = 18c_n - 20b_n \end{cases}$$

(1) の結果より，$a_1 = 2\sqrt{5},\ a_2 = 16$ であるので，$b_1 = 2,\ c_1 = 16$ となる．これより帰納的に $b_n,\ c_n$ は整数となる．$\alpha^{2026} = a_{2026} - \beta^{2026}$ であるので，$a_{2026} = c_{1013}$ の 1 の位の数=下 1 桁を求めるために以下，法を 10 とする合同式を考える．$c_{n+1} = 18c_n - 20b_n \equiv 8c_n$ である．$c_1 = 16 \equiv 6$ より，

$$c_{1013} \equiv 6 \cdot 8^{1012}$$

自然数 k に対して，8^k を 10 で割った余りを調べると，$8^1 = 8,\ 8^2 = 64 \equiv 4,\ 8^3 \equiv 32 \equiv 2,\ 8^4 \equiv 16 \equiv 6,\ 8^5 \equiv 48 \equiv 8$ となり，周期 4 で繰り返す．1012 は 4 の倍数であるため，$8^{1012} \equiv 8^4 \equiv 6$ となる．

したがって，

$$c_{1013} \equiv 6 \cdot 6 = 36 \equiv 6$$

以上より，a_{2026} の 1 の位の数は 6 となる．$\beta = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ について，$0 < \beta < 1$ より $0 < \beta^{2026} < 1$ であることから，$\alpha^{2026} = a_{2026} - \beta^{2026}$ の 1 の位の数は **5** である．

4. 4 つの箱と 4 つのボールがあり，箱にはそれぞれ 1 から 4 の番号が，ボールには A，B，C，D のアルファベットがそれぞれ 1 つずつ書かれている。初めに，1 の箱に A のボール，2 の箱に B のボール，3 の箱に C のボール，4 の箱に D のボールを入れる。

3 枚のカードに 1 から 3 の番号を書き，袋の中に入れる。その袋から 1 枚のカードを取り出し，取り出したカードの数が 1 であれば 1 の箱と 2 の箱に入っているボールを入れ替える。2 であれば 2 と 3 の箱，3 であれば 3 と 4 の箱のボールを入れ替える。引いたカードは袋に戻す。カードを引いてボールを入れ替える作業を 1 回の操作とする。

(1) 4 回の操作後に A が 4 の箱に入っている確率は $\dfrac{\boxed{\text{レ}}}{\boxed{\text{ロワ}}}$，5 回の操作後に A が 4 の箱に入っている確率は $\dfrac{\boxed{\text{ヲン}}}{\boxed{\text{あいう}}}$ である。

(2) 6 回の操作後，A が 4 の箱に入っていた。このとき，1 の箱に D，2 の箱に C，3 の箱に B が入っている条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{え}}}{\boxed{\text{おか}}}$ である。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{\text{レ}}{\text{ロワ}}$，$\dfrac{\text{ヲン}}{\text{あいう}}$	$\dfrac{2}{27}$，$\dfrac{26}{243}$
$\dfrac{\text{え}}{\text{おか}}$	$\dfrac{8}{49}$

解説

(1) n 回の操作後に A が 1 の箱，2 の箱，3 の箱，4 の箱に入っている確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とおく．ただし $p_0 = 1$，$q_0 = r_0 = s_0 = 0$ とする．このとき，0 以上の整数 n に対して

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$$
$$q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n$$
$$r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}s_n$$
$$s_{n+1} = \frac{1}{3}r_n + \frac{2}{3}s_n$$

が成り立つ．よって，

$$(p_1,\ q_1,\ r_1,\ s_1) = \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$$
$$(p_2,\ q_2,\ r_2,\ s_2) = \left(\frac{5}{9},\ \frac{3}{9},\ \frac{1}{9},\ 0\right)$$
$$(p_3,\ q_3,\ r_3,\ s_3) = \left(\frac{13}{27},\ \frac{9}{27},\ \frac{4}{27},\ \frac{1}{27}\right)$$
$$(p_4,\ q_4,\ r_4,\ s_4) = \left(\frac{35}{81},\ \frac{26}{81},\ \frac{14}{81},\ \frac{6}{81}\right)$$
$$(p_5,\ q_5,\ r_5,\ s_5) = \left(\frac{96}{243},\ \frac{75}{243},\ \frac{46}{243},\ \frac{26}{243}\right)$$

となるので，$s_4=\dfrac{6}{81}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{27}}$，$s_5=\dfrac{\mathbf{26}}{\mathbf{243}}$ である．

(2)　さらに操作をもう 1 回行うと，

$$(p_6,\ q_6,\ r_6,\ s_6)=\left(\frac{267}{729},\ \frac{217}{729},\ \frac{147}{729},\ \frac{98}{729}\right)$$

となる．つまり 6 回の操作後，A が 4 の箱に入っている確率は $\dfrac{98}{729}$ である．

6 回の操作後，箱 1 に D，箱 2 に C，箱 3 に B，箱 4 に A が入っている場合の数を求めよう．

最初の並びが ABCD で最後の並びが DCBA なのだから A, B, C, D のどの 2 つの左右の並びも入れ替わっている．A, B, C, D の 4 つから 2 つを選ぶ選び方は ${}_4C_2$ だから，6 回の操作は AB の入れ替え〜CD の入れ替えの 6 つの入れ替えに一つずつ対応しなければならない．特に AD の入れ替えがカード 1, 2, 3 のどのカードで実現されるかで場合分けする．

(i)　AD の入れ替えが 1 のカードで起こる場合

入れ替える直前には D は 2 の箱に入っていないといけないので，D を移動させるために AD の入れ替えに先立ってカード 3，カード 2 がこの順に出ている必要がある．また，この入れ替えの後 A を 4 の箱に移動させるためにカード 2, カード 3 がこの順に現れないといけない．

結局カードを 3, 2, 1, 2, 3 の順に配置したうえで，もう一つのカードを何処かに挿入させることになる．ABCD をカード 3, 2, 1, 2, 3 の 5 回で入れ替えると

$$\mathrm{ABCD}\to\mathrm{ABDC}\to\mathrm{ADBC}\to\mathrm{DABC}\to\mathrm{DBAC}\to\mathrm{DBCA}$$

となるので，BC がこの順に並んでいるときに BC の入れ替えを挿入してやればよい．それは 4 箇所あって，その挿入による変更を赤字で表すと

$$\mathrm{ABCD}\to\mathrm{ACBD}\to\mathrm{ACDB}\to\mathrm{ADCB}\to\mathrm{DACB}\to\mathrm{DCAB}\to\mathrm{DCBA}$$
$$\mathrm{ABCD}\to\mathrm{ABDC}\to\mathrm{ADBC}\to\mathrm{ADCB}\to\mathrm{DACB}\to\mathrm{DCAB}\to\mathrm{DCBA}$$
$$\mathrm{ABCD}\to\mathrm{ABDC}\to\mathrm{ADBC}\to\mathrm{DABC}\to\mathrm{DACB}\to\mathrm{DCAB}\to\mathrm{DCBA}$$
$$\mathrm{ABCD}\to\mathrm{ABDC}\to\mathrm{ADBC}\to\mathrm{DABC}\to\mathrm{DBAC}\to\mathrm{DBCA}\to\mathrm{DCBA}$$

結局場合の数は 4 通りある．

(ii)　AD の入れ替えが 3 のカードで起こる場合

(i) と同様に，1, 2, 3, 2, 1 のカードの並びに BC の入れ替えを実現する挿入の仕方は 4 通りある．

(iii)　AD の入れ替えが 2 のカードで起こる場合

入れ替える直前には A が 2 の箱，D が 3 の箱にあるのだから，2 のカードに先立って 1, 3 のカードが 1 回ずつ現れる必要がある，この順番は入れ替えてもボールの並びに影響しない．また入れ替えた後 A, D を目標の位置に移動させるために，2 のカードの後に 1, 3 のカードが 1 回ずつ現れる必要がある．この順番は入れ替えてもボールの並びに影響しない．

ABCD をカード 1(3), 3(1), 2, 1(3), 3(1) の 5 回で入れ替えると次のように変化する．

$$\mathrm{ABCD}\to\mathrm{BACD(ABDC)}\to\mathrm{BADC}\to\mathrm{BDAC}\to\mathrm{DBAC(BDCA)}\to\mathrm{DBCA}$$

やはり，BC がこの順に並んでいるときに BC の入れ替えを挿入してやればよい．それは 2 箇所あって，その挿入による変更を赤字で表すと

$$\mathrm{ABCD}\to\mathrm{ACBD}\to\mathrm{CABD(ACDB)}\to\mathrm{CADB}\to\mathrm{CDAB}\to\mathrm{DCAB(CDBA)}\to\mathrm{DCBA}$$
$$\mathrm{ABCD}\to\mathrm{BACD(ABDC)}\to\mathrm{BADC}\to\mathrm{BDAC}\to\mathrm{DBAC(BDCA)}\to\mathrm{DBCA}\to\mathrm{DCBA}$$

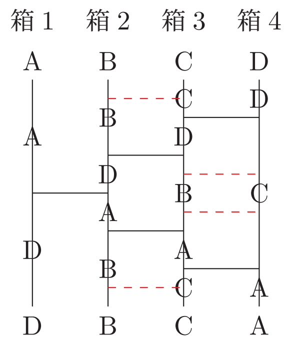
したがってこの場合の数は 8 通り存在する．

以上より 6 回の操作で ABCD を DCBA にする場合の数は $4+4+8=16$ 通りだとわかった．確率だと $\dfrac{16}{729}$ である．

求める条件付き確率は $\dfrac{16}{98}=\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{49}}$ である．

以上の解説はあみだくじで考えると理解しやすい．(i) の場合は次の図に対応する．黒線だけだと DBCA にな

るので，赤の破線を 1 箇所付け加えれば DCBA にすることができる．



5.　母線の長さが 1 である円錐がある。頂点を O とし，底面の円周上に，線分 AB が直径となるように点 A，B をとる。

xyz 空間において，この円錐を滑らせることなく転がすことを考える。まず，頂点 O が原点，点 A が $(1,0,0)$，点 B の z 座標が正となるように円錐をおく。この状態から，円錐の側面が xy 平面から離れないように円錐を転がすとき，元の位置に戻ってくるまでに円錐が通過する部分を W とおく。

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とするとき，以下の問いに答えよ。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。また，各問いにおいて，点の位置は，円錐を最初においた場所で考えるものとする。

また，$\boxed{き}$，$\boxed{く}$，$\boxed{こ}$，$\boxed{す}$，$\boxed{せ}$，$\boxed{そ}$，$\boxed{ち}$，$\boxed{つ}$ には，次の選択肢から適当なものを選んで番号で答えよ。同じ番号を何回選んでもよい。

① k　② k^2　③ $\sin\theta$　④ $\cos\theta$　⑤ $\tan\theta$
⑥ $\sin^2\theta$　⑦ $\cos^2\theta$　⑧ $\sin t$　⑨ $\cos t$　⓪ $\tan t$

(1)　点 B の座標は $\left(\boxed{き}, 0, \boxed{く}\right)$ である。

(2)　平面 $z=k$ $(k>0)$ と円錐の底面とが共有する線分の端点を C_k，D_k とする。C_k と点 $\mathrm{P}_k(0,0,k)$ との距離は $\sqrt{\boxed{け}-\boxed{こ}}$ である。また，W の体積は $\dfrac{\boxed{さ}}{\boxed{し}}\pi\boxed{す}$ である。

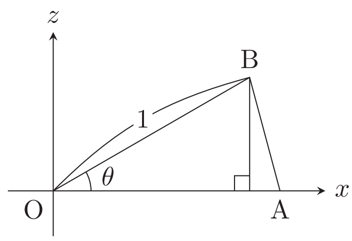
(3)　線分 OC_k と平面 $z=0$ のなす角を t とすると，$\mathrm{P}_k\mathrm{C}_k=\boxed{せ}$ である。円錐の底面の周が通過する曲面の面積は，$2\pi\displaystyle\int_0^\theta \boxed{せ}\,dt=2\pi\boxed{そ}$ であるから，W の表面積は $\pi\left(1+\boxed{た}\boxed{ち}+\boxed{つ}\right)$ である。

解答

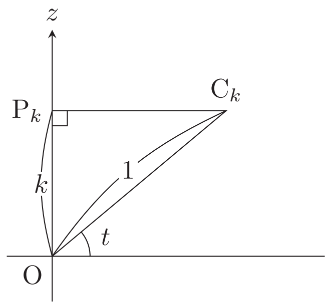
解答記号	正解
(き , 0, く)	(④ , 0, ③)
$\sqrt{け-こ}$	$\sqrt{1-②}$
$\dfrac{さ}{し}\pi$す	$\dfrac{2}{3}\pi$③
せ	⑨
2πそ	2π③
$\pi(1+たち+つ)$	$\pi(1+2③+④)$

解説

(1)　$\mathrm{OB}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ で，点 B は xz 平面上なので，図より，$\mathrm{B}(\boldsymbol{\cos\theta},\ 0,\ \boldsymbol{\sin\theta})$ である.



(2)　点 C_k は底面の周上の点であるから，$\mathrm{OC}_k = 1$ である．また，C_k は平面 $z = k$ 上にあるから，$\mathrm{P}_k(0,\ 0,\ k)$ との距離は，三平方の定理より



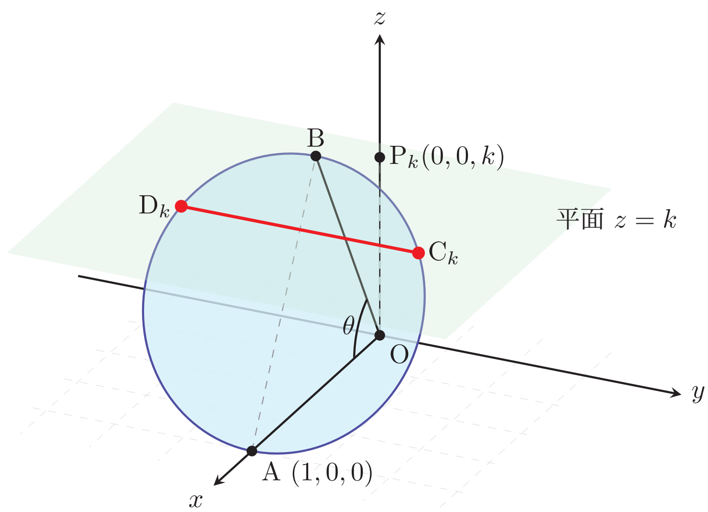
$$\mathrm{P}_k\mathrm{C}_k = \sqrt{\mathrm{OC}_k^2 - \mathrm{OP}_k^2} = \sqrt{1^2 - k^2} = \boldsymbol{\sqrt{1 - k^2}}$$

となる．

次に W の体積を求める．円錐の底面の周が通過する曲面を $z = k$ で切断すると，半径 $\sqrt{1-k^2}$ の円になる．また W の内側は，底面の半径が $\cos\theta$ で高さが $\sin\theta$ の円錐（の側面）になっている．したがって W の体積は

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sin\theta} \pi(1-k^2)\,dk - \frac{1}{3}\pi\cos^2\theta\sin\theta \\
&= \pi\left[k - \frac{k^3}{3}\right]_0^{\sin\theta} - \frac{1}{3}\pi\cos^2\theta\sin\theta \\
&= \pi\left(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right) - \frac{1}{3}\pi(1-\sin^2\theta)\sin\theta \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi\sin\theta}
\end{aligned}$$

である．



(3)　前問の図より，$\mathrm{P}_k\mathrm{C}_k = \boldsymbol{\cos t}$ である．円錐の底面の周が通過する曲面の面積は，

$$2\pi\int_0^{\theta} \cos t\,dt = \boldsymbol{2\pi\sin\theta}$$

である．W の xy 平面の部分の面積は π，W のくりぬかれた円錐の側面積は $\pi\cos\theta$ なので，W の表面積は

$$\pi + 2\pi\sin\theta + \pi\cos\theta = \pi(1 + \boldsymbol{2\sin\theta + \cos\theta})$$

である．

講評

1.［空間ベクトル］（標準〜やや難）

正四面体を二つ貼り合わせた立体の断面を考えさせる問題．立体の形をとらえるのはやや難しいが平面と直線の交点を求める手順を正しく踏めば正解にたどり着ける．(3) の五角形の面積，五角錐の体積は (2) の結果を利用し比を使ってうまく処理したい．

2.［整数，指数対数］（やや易〜標準）

n 進法で表したときの桁数を問う問題．2 進法，5 進法で表したときの桁数 a_n，b_n についての不等式が立てられればそれほど難しくはない．ここは確実にとっておきたい．

3.［数列，整数］（標準〜やや難）

誘導に従って漸化式を作る問題．基本対称式 $\alpha+\beta=2\sqrt{p}$，$\alpha\beta=p-q$ を利用し誘導に乗って解き進めたいところである．(3) は (2) の漸化式を利用し $\{c_n\}$ の 1 の位の周期性を使うことに気付けるかがポイントとなる．

4.［確率］（難）

4 つの箱に入った 4 つのボールを，与えられたルールに従って入れ替えていくときの確率を求める問題．(1) の前半は正解したいが，他の 2 問については少なくとも時間内に正解に達するのはかなり困難だろう．特に (2) が難しい．

5.［数学Ⅲの積分］（やや難）

座標空間内で円錐を転がしてできる立体について，体積と表面積を求める問題．立体の様子がつかめれば，計算量は少ないため完答しやすいが，苦戦した受験生も多いだろう．

2026 年度前期と同様に，2025 年度前後期と比べると問題の分量が増え，難易度も上がり，得点しにくくなっている．制限時間内に解き切るのは難しいだろう．今回のセットでは大問 2 を確実にとり，大問 1, 3, 5 でうまく立ち回りたい．大問 4 の確率は難しく，ここは得点できなくても仕方ない．目標は 40%.

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ