解答速報

久留米大学医学部（前期）　数学

2026年 2月 1日実施

1.　$\mathrm{AB}=c,\ \mathrm{AC}=b\ (c>b)$ である三角形 ABC がある。$\angle\mathrm{A}$ の 2 等分線と辺 BC の交点を D とし，$\angle\mathrm{DAC}=\theta$ とするとき，以下の問いに答えよ。

ただし，$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{カ}}$ には，次の選択肢から適当なものを選んで番号で答えよ。同じ番号を何回選んでもよい。

① b　② c　③ $b+c$　④ $b-c$　⑤ $c-b$　⑥ bc

また，$\boxed{\text{あ}}$ ，$\boxed{\text{い}}$ には，次の選択肢から適当なものを選んで番号で答えよ。同じ番号を何回選んでもよい。

① $\cos\theta$　② $\cos^2\theta$　③ $\cos^3\theta$　④ $\cos^4\theta$　⑤ $\cos^5\theta$

(1)　$\mathrm{AD}=\dfrac{2\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\boxed{\text{あ}}$ である。

(2)　AD を直径とする円 O を考える。円 O が辺 AB 上および AC 上でそれぞれ交点をもつ（ただし端点を除く）のは，$\sqrt{\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{2\boxed{\text{エ}}}}<\sin\theta<1$ のときである。このとき，その交点をそれぞれ E, F とする。三角形 AEF の面積を S とすると，$S=\left(\dfrac{2\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)^2\sin\theta\boxed{\text{い}}$ である。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{2\text{ア}}{\text{イ}}$あ	$\dfrac{2⑥}{③}$①
$\dfrac{\text{ウ}}{2\text{エ}}$	$\dfrac{⑤}{2②}$
$\dfrac{2\text{オ}}{\text{カ}}$，い	$\dfrac{2⑥}{③}$，⑤

解説

(1)　△ABC の面積は，△ABD と △ACD の面積の和に等しいので，

$$\frac{1}{2}bc\sin 2\theta=\frac{1}{2}c\cdot\mathrm{AD}\sin\theta+\frac{1}{2}b\cdot\mathrm{AD}\sin\theta$$
$$\iff bc\cdot 2\sin\theta\cos\theta=\mathrm{AD}\sin\theta(b+c)$$
$$\iff \mathrm{AD}=\frac{2bc}{b+c}\cos\theta$$

よって，$\boxed{\text{ア}}$ は ⑥，$\boxed{\text{イ}}$ は ③，$\boxed{\text{あ}}$ は ① である．

(2)　AD を直径とする円 O について，$\angle\mathrm{AED} = \angle\mathrm{AFD} = 90^\circ$ である．直角三角形 ADE, ADF において，

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AF} = \mathrm{AD}\cos\theta = \frac{2bc}{b+c}\cos^2\theta$$

である．$c > b$ なので，F が辺 AC 上にあれば，E は辺 AB 上にある．よって点 E, F が辺（端点を除く）上にある条件は $0 < \mathrm{AF} < b$ である．これより，

$$0 < \frac{2bc}{b+c}\cos^2\theta < b \iff 0 < \frac{2c}{b+c}(1-\sin^2\theta) < 1$$

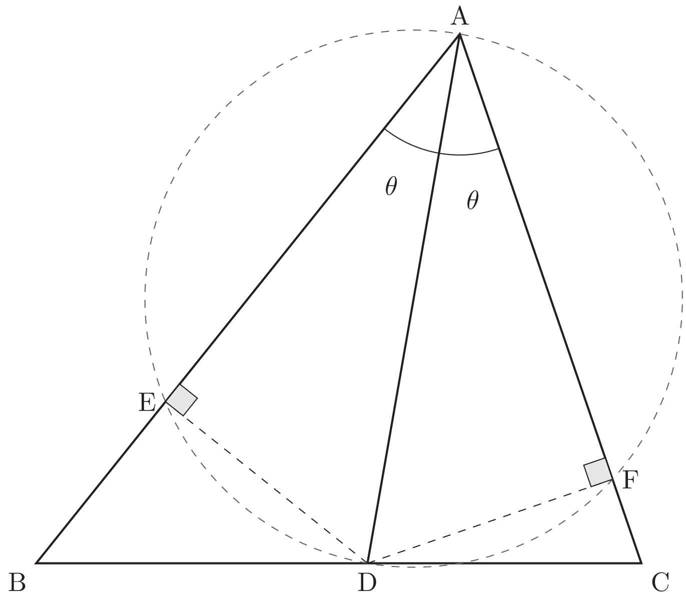
これを整理して $\sqrt{\dfrac{c-b}{2c}} < \sin\theta < 1$ を得る．

よって，$\boxed{\text{ウ}}$ は ⑤，$\boxed{\text{エ}}$ は ② である．

次に，△AEF の面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AF}\sin 2\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{2bc}{b+c}\cos^2\theta\right)^2(2\sin\theta\cos\theta) \\ &= \left(\frac{2bc}{b+c}\right)^2\sin\theta\cos^5\theta \end{aligned}$$

よって，$\boxed{\text{オ}}$ は ⑥，$\boxed{\text{カ}}$ は ③，$\boxed{\text{い}}$ は ⑤ である．



2. 1辺の長さが1である正六角形 ABCDEF において，辺 AB を $1:2$ に内分する点を G，対角線 AC を $p:(1-p)$ に内分する点を P，同じく AC を $q:(1-q)$ に内分する点を Q とする $(0<p<q<1)$。

(1) 直線 GP が辺 EF（端点を含む）と共有点をもつのは，$\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}} \leqq p \leqq \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ のときである。また，直線 GQ が辺 DE（端点を含む）と共有点をもつのは，$\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}} \leqq q \leqq \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ のときである。

(2) △GPQ の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タチ}}(q-p)$ である。

解答

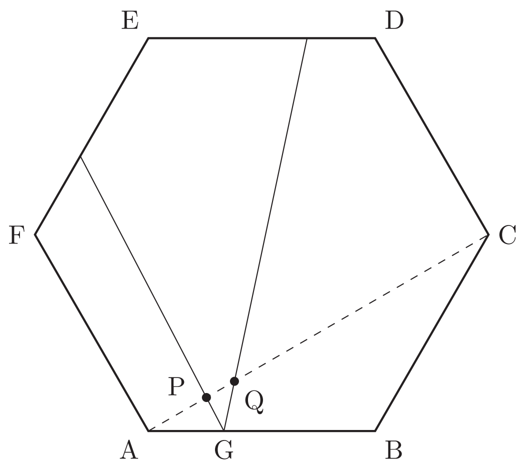
解答記号	正解
$\dfrac{キ}{ク} \leqq p \leqq \dfrac{ケ}{コ}$	$\dfrac{1}{7} \leqq p \leqq \dfrac{1}{5}$
$\dfrac{サ}{シ} \leqq q \leqq \dfrac{ス}{セ}$	$\dfrac{1}{5} \leqq q \leqq \dfrac{2}{7}$
$\dfrac{\sqrt{ソ}}{タチ}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

解説

(1) 右図のように正六角形を座標平面上に配置し，$A(0,\ 0), B(1,\ 0),\ C\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とすると，

$D(1,\ \sqrt{3}),\ E\left(0,\ \sqrt{3}\right),\ F\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ G\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right),$

$P\left(\dfrac{3}{2}p,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}p\right), Q\left(\dfrac{3}{2}q,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}q\right)$ である.



直線 GP の方程式は

$$y=\frac{3\sqrt{3}p}{9p-2}\left(x-\frac{1}{3}\right)\ \left(\text{ただし，} p \neq \frac{2}{9}\right)$$

であるので，これと直線 $EF: y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ との交点の x 座標が $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0$ となればよい.

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{-5p+1}{3p-1} \leqq 0 \iff \frac{1}{7} \leqq p \leqq \frac{1}{5}$$

したがって，求める p の値の範囲は $\boldsymbol{\dfrac{1}{7} \leqq p \leqq \dfrac{1}{5}}$

直線 GQ の方程式は

$$y=\frac{3\sqrt{3}q}{9q-2}\left(x-\frac{1}{3}\right)\ \left(\text{ただし，} q \neq \frac{2}{9}\right)$$

であるので，これと直線 $DE: y=\sqrt{3}$ との交点の x 座標が $0 \leqq x \leqq 1$ となればよい.

$$0 \leqq \frac{10q-2}{3q} \leqq 1 \iff \frac{1}{5} \leqq q \leqq \frac{2}{7}$$

したがって，求める q の値の範囲は $\boldsymbol{\dfrac{1}{5} \leqq q \leqq \dfrac{2}{7}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{GP}} = \left(\dfrac{3}{2}p - \dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}p\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{GQ}} = \left(\dfrac{3}{2}q - \dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}q\right)$ であるので，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}q\left(\frac{3}{2}p - \frac{1}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}p\left(\frac{3}{2}q - \frac{1}{3}\right)\right| \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}(q-p)} \end{aligned}$$

である．

3. 座標平面上に，放物線 $y=-x^2$ がある。この放物線上に，点 $\mathrm{A}(a,\ -a^2)$，$\mathrm{B}(a+p,\ -(a+p)^2)$ をとる $(p>0)$。さらに，点 C を三角形 ABC が正三角形となるようにとる。ただし，頂点 C は辺 AB に対して反時計回りの位置にあるとする。

(1) 点 C の座標は

$$\left(a+\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}p\left(\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}a+\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}p+\boxed{\text{ヌ}}\right),\ -a^2+\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}p\left(-\boxed{\text{ハ}}a-p+\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}\right)\right)$$

である。

(2) $p=\sqrt{3}$ とする。a がすべての実数をとるように変化するとき，点 C の軌跡は $y=-\dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}x^2+\dfrac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ である。

(3) a を負の定数とする。p がすべての正の実数をとるように変化するとき，点 C の y 座標は $p=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ム}}}}{\boxed{\text{メ}}}-a$ のとき，最大値 $\dfrac{\left(\sqrt{\boxed{\text{モ}}}-\boxed{\text{ヤ}}a\right)^2}{\boxed{\text{ユ}}}-a^2$ をとる。したがって，a がすべての負の実数をとるように変化するとき，点 C の y 座標の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラ}}}$ であり，そのとき $a=-\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{リ}}}}{\boxed{\text{ル}}}$，$p=\sqrt{\boxed{\text{レ}}}$ である。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{\text{ツ}}{\text{テ}}$，$\text{ト}\sqrt{\text{ナ}}a+\sqrt{\text{ニ}}p+\text{ヌ}$	$\dfrac{1}{2}$，$2\sqrt{3}a+\sqrt{3}p+1$
$\dfrac{\text{ネ}}{\text{ノ}}$，$-\text{ハ}\,a-p+\sqrt{\text{ヒ}}$	$\dfrac{1}{2}$，$-2a-p+\sqrt{3}$
$\dfrac{\text{フ}}{\text{ヘホ}}$，$\dfrac{\text{マ}}{\text{ミ}}$	$\dfrac{1}{16}$，$\dfrac{3}{4}$
$\dfrac{\sqrt{\text{ム}}}{\text{メ}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\dfrac{(\sqrt{\text{モ}}-\text{ヤ}\,a)^2}{\text{ユ}}$	$\dfrac{(\sqrt{3}-2a)^2}{8}$
$\dfrac{\text{ヨ}}{\text{ラ}}$	$\dfrac{3}{4}$
$\dfrac{\sqrt{\text{リ}}}{\text{ル}}$，$\sqrt{\text{レ}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{3}$

解説

(1) 複素数平面で考える．$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ とすると，

$$\begin{aligned}\gamma&=(\beta-\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)+\alpha\\&=\{p-(2ap+p^2)i\}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+a-a^2i\\&=a+\frac{1}{2}p(2\sqrt{3}a+\sqrt{3}p+1)+\left\{-a^2+\frac{1}{2}p(-2a-p+\sqrt{3})\right\}i\end{aligned}$$

であるので，C の座標は $\left(\boldsymbol{a+\frac{1}{2}p(2\sqrt{3}a+\sqrt{3}p+1),\ -a^2+\frac{1}{2}p(-2a-p+\sqrt{3})}\right)$ である．

(2) $p=\sqrt{3}$ のとき，$x=a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{3}a+3+1)=4a+2\sqrt{3}$．これより $a=\dfrac{x-2\sqrt{3}}{4}$ となる．一方 $y=-a^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(-2a-\sqrt{3}+\sqrt{3})=-a^2-\sqrt{3}a$ であるから，a を消去して整理すると，

$$y=-\left(\frac{x-2\sqrt{3}}{4}\right)^2-\sqrt{3}\left(\frac{x-2\sqrt{3}}{4}\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{16}x^2+\frac{3}{4}}$$

となる．

(3) 点 C の y 座標は

$$-\frac{1}{2}p^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-a\right)p-a^2=-\frac{1}{2}\left\{p-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-a\right)\right\}^2-a^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-a\right)^2$$

であるから，$p=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}-a$ のとき最大となる．このときの最大値は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-a\right)^2-a^2=\boldsymbol{\frac{(\sqrt{3}-2a)^2}{8}}-a^2$$

である．これを $g(a)$ とおくと，

$$g(a)=-\frac{1}{2}a^2-\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{3}{8}=-\frac{1}{2}\left(a+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$a<0$ の範囲で最大値は $a=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ のとき $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$ であり，$p=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boldsymbol{\sqrt{3}}$ である．

4.　A, B の 2 人でゲームをする。

- コインを投げて表が出たら A が 1 ポイント，裏が出たら B が 1 ポイント獲得する。
- これを繰り返し，先に 3 ポイント獲得した方が， 1 セットを得る。いずれかが 1 セットを得た時点で，それぞれのポイントはともに 0 に戻る。
- 何セットかを繰り返し，先に 3 セットを得た方がこのゲームの勝者となる。ゲームはその時点で終了する。

勝敗がつくまでに行われたすべてのセットにおいて，A が獲得したポイントの合計を p_a，B が獲得したポイントの合計を p_b とする。

(1)　1 回のセットにおいて，コインを 3 回投げて A がそのセットを得る確率は $\dfrac{\boxed{ロ}}{\boxed{ワ}}$，コインを 4 回投げて A がそのセットを得る確率は $\dfrac{\boxed{ヲ}}{\boxed{ンう}}$，コインを 5 回投げて A がそのセットを得る確率は $\dfrac{\boxed{え}}{\boxed{おか}}$ である。1 回のセットで A が獲得するポイント数の期待値は $\dfrac{\boxed{きく}}{\boxed{けこ}}$ である。

(2)　A が 3 セット，B が 0 セットを得て A がゲームの勝者となったとき，$p_b = 3$ となる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{さしす}}{2^{\boxed{せ}}}$ であり，$p_b = 6$ となる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{そた}}{2^{\boxed{ち}}}$ である。

(3)　A がゲームの勝者となり，$p_a = 9,\ p_b = 11$ となる確率は $\dfrac{3^{\boxed{つ}}}{2^{\boxed{てと}}}$ である。

(4)　A がゲームの勝者となったとき，$p_b \geqq p_a + 2$ となる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{なにぬ}}{2^{\boxed{ねの}}}$ である。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{ロ}{ワ},\ \dfrac{ヲ}{ンう},\ \dfrac{え}{おか}$	$\dfrac{1}{8},\ \dfrac{3}{16},\ \dfrac{3}{16}$
$\dfrac{きく}{けこ}$	$\dfrac{33}{16}$
$\dfrac{さしす}{2^{せ}}$	$\dfrac{135}{2^9}$
$\dfrac{そた}{2^{ち}}$	$\dfrac{27}{2^9}$
$\dfrac{3^{つ}}{2^{てと}}$	$\dfrac{3^5}{2^{17}}$
$\dfrac{なにぬ}{2^{ねの}}$	$\dfrac{567}{2^{16}}$

解説

(1)　1 つのセットを A が得る確率は，コインを投げる回数 n に応じて以下のようになる.

- $n = 3$：　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$
- $n = 4$：　${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{16}}$
- $n = 5$：　${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{16}}$

1 セットで A が獲得するポイント数の期待値を E_a とする．A がセットを得るとき $\left(確率\ \dfrac{1}{2}\right)$，A は 3 ポイントを獲得する．B がセットを得るとき $\left(確率\ \dfrac{1}{2}\right)$，A が獲得するポイント数は 0，1，2 のいずれかであり，その確率はそれぞれ $\dfrac{1}{8}, \dfrac{3}{16}, \dfrac{3}{16}$ である．よって，

$$E_a = 3\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{16} + 2\cdot\frac{3}{16} = \boldsymbol{\frac{33}{16}}$$

である．

(2)　A がセットを得るとき，B が獲得するポイント数が k である条件付き確率を $P_A(k)$ とすると，

$$P_A(0) = \frac{1}{8} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{4},\ P_A(1) = \frac{3}{16} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{8},\ P_A(2) = \frac{3}{16} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

である．A が 3 セット連取して得るとき，p_b は 3 回のセットでの B が獲得するポイント数の合計である．
$p_b = 3$ となるのは，ポイント数が $\{0,1,2\}$ の組合せ（$3! = 6$ 通り）または $\{1,1,1\}$ の場合である．

$$6\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{135}{2^9}}$$

$p_b = 6$ となるのは，$\{2,2,2\}$ の場合のみであるから，

$$\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{27}{2^9}}$$

(3)　A が勝者で $p_a = 9$ かつ $p_b = 11$ となるのは，セットカウント $3-2$ で A が勝ち，B が得た 2 セットで A が 0 ポイント（すなわち B が 2 セットとも 3 連続でポイントを取る）の場合である．このとき B はその 2 セットで $3+3=6$ ポイント得る．$p_b = 11$ となるためには，A が得た 3 セットで B が合計 $11-6=5$ ポイント獲得する必要がある．ポイント数の合計が 5 となる組合せは $\{1,2,2\}$ のみ（3 通り）である．A が最後にセットを取らなければならないことに注意すると求める確率は，

$$\left(\frac{4!}{2!} + {}_4\mathrm{C}_2\right)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{3}{16}\right)^2 \times \left(\frac{3}{16}\right) = \boldsymbol{\frac{3^5}{2^{17}}}$$

(4)　$p_b \geqq p_a + 2$ となるのは，セットカウント $3-2$ で A が勝ち，ポイントの獲得状況が以下のいずれかの場合である．

- $(p_a,\ p_b) = (9,\ 12)$ のときの確率は ${}_4\mathrm{C}_2\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3}{16}\right)^2 \times \left(\dfrac{3}{16}\right) = \dfrac{3^4}{2^{17}}$
- $(p_a,\ p_b) = (10,\ 12)$ のときの確率は $\dfrac{4!}{2!}\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{16}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{16}\right) = \dfrac{3^5}{2^{17}}$
- $(p_a,\ p_b) = (9,\ 11)$ のときの確率は $\left(\dfrac{4!}{2!} + {}_4\mathrm{C}_2\right)\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\left(\dfrac{3}{16}\right)^2 \times \left(\dfrac{3}{16}\right) = \dfrac{3^5}{2^{17}}$ （これは前問で求めている．）

求める条件付き確率は，これらの和を A が勝つ確率 $\dfrac{1}{2}$ で割って，

$$\frac{81+243+243}{2^{17}} \div \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{567}{2^{16}}}$$

である．

5. a を正の定数とする。放物線 $C : y = -x^2 + ax$ 上に点 $\mathrm{P}(p,\ -p^2 + ap)$ $(0 < p < a)$ がある。原点と点 P を通る直線を l_1，点 P における放物線 C の接線を l_2 とする。

(1) l_1 と l_2 が直交するような p の値がただひとつに定まるような a の値は，$a = \boxed{は}\sqrt{\boxed{ひ}}$ であり，そのとき $p = \dfrac{\boxed{ふ}}{\sqrt{\boxed{へ}}}$ である。以下，$a = \boxed{は}\sqrt{\boxed{ひ}}$，$p = \dfrac{\boxed{ふ}}{\sqrt{\boxed{へ}}}$ のときについて考える。

(2) 放物線上の点 $\mathrm{Q}(q,\ -q^2 + aq)$ $(0 \leqq q \leqq p)$ を通り，l_1 に垂直な直線を l_3 とする。l_3 と l_1 の交点を R とするとき，$\mathrm{QR} = \dfrac{1}{\sqrt{\boxed{ほ}}}\left(\boxed{ま}q - \sqrt{\boxed{み}}q^2\right)$，$\mathrm{OR} = \dfrac{1}{\sqrt{\boxed{む}}}\left(\boxed{め}\sqrt{\boxed{も}}q - q^2\right)$ である。

(3) 放物線 C と直線 l_1 で囲まれた領域を D とする。QR を半径とする円の面積は $\dfrac{\pi}{3}\left(\boxed{や}q^2 - \boxed{ゆ}\sqrt{\boxed{よ}}q^3 + \boxed{ら}q^4\right)$ であるから，領域 D を直線 l_1 の周りに 1 回転してできる回転体の体積は $\dfrac{\boxed{りる}\sqrt{\boxed{れ}}}{\boxed{ろわ}}\pi$ である。

解答

解答記号	正解
$は\sqrt{ひ},\ \dfrac{ふ}{\sqrt{へ}}$	$2\sqrt{2},\ \dfrac{3}{\sqrt{2}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{ほ}}\left(ま\,q - \sqrt{み}q^2\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(3q - \sqrt{2}q^2\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{む}}\left(め\sqrt{も}q - q^2\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(3\sqrt{2}q - q^2\right)$
$や\,q^2 - ゆ\sqrt{よ}q^3 + ら\,q^4$	$9q^2 - 6\sqrt{2}q^3 + 2q^4$
$\dfrac{りる\sqrt{れ}}{ろわ}$	$\dfrac{27\sqrt{3}}{40}$

解説

(1) 原点と $\mathrm{P}(p,\ -p^2 + ap)$ を通る直線 l_1 の傾きは $-p + a$ である．

$f(x) = -x^2 + ax$ とおくと，$f'(x) = -2x + a$ より，点 P における接線 l_2 の傾きは $-2p + a$ である．l_1 と l_2 が垂直となる条件は，

$$(a-p)(a-2p) = -1 \iff 2p^2 - 3ap + a^2 + 1 = 0$$

である．

$$g(p) = 2p^2 - 3ap + a^2 + 1 = 2\left(p - \frac{3}{4}a\right)^2 - \frac{a^2}{8} + 1$$

とおくと，$g(0) = a^2 + 1 > 0$，$g(a) = 1 > 0$ であることより，$g(p) = 0$ が成り立つような p が $0 < p < a$ においてただひとつに定まる条件は，

$$\frac{3}{4}a > 0 \text{ かつ } -\frac{a^2}{8} + 1 = 0$$

である．よって，$a = \mathbf{2\sqrt{2}}$ である．

このとき

$$g(p) = 0 \iff 2\left(p - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$$

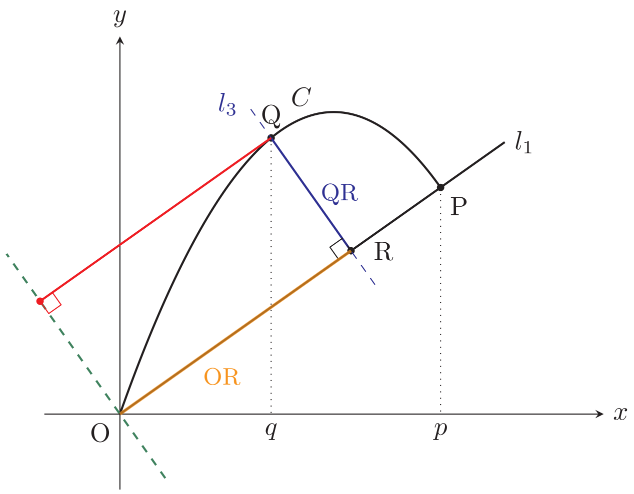
より，$p=\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{2}}}$ である．

(2)　前問より，$C: y=-x^2+2\sqrt{2}x$, $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}},\ \dfrac{3}{2}\right)$, $l_1: y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ である．QR の長さは，点 $\mathrm{Q}(q,\ -q^2+2\sqrt{2}q)$ と $l_1: -x+\sqrt{2}y=0$ との距離なので，

$$\mathrm{QR}=\frac{|-q+\sqrt{2}(-q^2+2\sqrt{2}q)|}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2})^2}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}(3q-\sqrt{2}q^2)}\ \left(\because 0\leqq q\leqq\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

である．また，原点を通り l_1 に直交する直線の方程式は $\sqrt{2}x+y=0$ であり，この直線と点 Q との距離が OR に等しいので，

$$\mathrm{OR}=\frac{|\sqrt{2}q+(-q^2+2\sqrt{2}q)|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}(3\sqrt{2}q-q^2)}\ \left(\because 0\leqq q\leqq\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$



別解

OR については，l_1 の方向ベクトルの 1 つを $\vec{a}=(\sqrt{2},\ 1)$ とおくと，

$$\mathrm{OR}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\sqrt{2}q+(-q^2+2\sqrt{2}q)}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}(3\sqrt{2}q-q^2)}$$

と求めることもできる．

(3)　QR を半径とする円の面積は，

$$\pi\mathrm{QR}^2=\pi\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(3q-\sqrt{2}q^2)\right\}^2=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}\left(9q^2-6\sqrt{2}q^3+2q^4\right)}$$

である．求める回転体の体積は，OR の長さを t とおくと，$\dfrac{dt}{dq}=\dfrac{3\sqrt{2}-2q}{\sqrt{3}}$ より，

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\pi\mathrm{QR}^2\,dt\\ &=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}q^2(3-\sqrt{2}q)^2\cdot\frac{3\sqrt{2}-2q}{\sqrt{3}}\,dq\\ &=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}q^2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-q\right)^3\,dq\end{aligned}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} q^2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-q\right)^3 dq\\
&=\left[-\frac{q^2}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-q\right)^4\right]_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}+\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\frac{q}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-q\right)^4 dq\\
&=\left[-\frac{q}{10}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-q\right)^5\right]_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}+\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\frac{1}{10}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-q\right)^5 dq\\
&=\left[-\frac{1}{60}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-q\right)^6\right]_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\\
&=\frac{1}{60}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^6\\
&=\frac{3^5}{160}
\end{aligned}
$$

となるので，求める回転体の体積は，$\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3^5}{160}=\boldsymbol{\dfrac{27\sqrt{3}}{40}\pi}$ である．

大的中

2025 年 12 月実施 久留米大学医学部攻略講座，2026 年 1 月実施 久留米大学対策

xy 平面上に曲線 $C\colon y=x^2-x\ (0\leqq x\leqq 2)$ がある．C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-t)$ から直線 $l: y=x$ に下ろした垂線と l との交点を H とする．

(1)　線分 PH の長さを t を用いて表せ．

(2)　O を原点とするとき，線分 OH の長さを t を用いて表せ．

(3)　C と l で囲まれた部分を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

斜軸回転体の体積を求める問題が大的中！　誘導の流れもほぼ同じ！

予想配点

1. 20 点　(1) 5　(2) $7+8$

2. 20 点　(1) $5+7$　(2) 8

3. 20 点　(1) 5　(2) 4　(3) $2+3+2+2+2$

4. 20 点　(1) $2+2+2+2$　(2) $2+2$　(3) 4　(4) 4

5. 20 点　(1) $3+3$　(2) $3+3$　(3) $4+4$

講評

1. ［図形と計量］（標準～やや難）

2 辺が文字で表された三角形の角の二等分線についての問題．(2) の $\sin\theta$ の範囲は難しいが，三角形 AEF の面積は円の直径の性質を考えて突破したいところである．空所補充や記述形式のようにただ解くだけならよいが，マーク形式であるためこの大問は選択肢を照らし合わせながら慎重に処理する必要がある．

2. ［平面ベクトル］（やや易）

正六角形の位置ベクトルの問題．(1) は辺 EF 上の点をおいてベクトルを用いて表す方法も考えられるが文字が増えて処理が煩雑になるので，解答のように座標化して処理するといいだろう．また，(2) は (1) と関係なく，さらに易しい問題であったためここは確実にとっておきたい．

3. ［2 次関数］（標準）

放物線上の 2 点を正三角形の 1 辺となるようにとったときの残りの頂点に関する問題．(1) の C の座標がやや煩雑だがここをしっかりと合わせておきたい．複素数平面として回転移動させたり，ベクトルを用いたりといろいろやりようはある．(1) さえ突破できれば完答も狙える．2 変数関数の処理にも慣れておこう．

4. ［確率］（難）

コインを投げてゲームをおこなう問題．(1) は確実にとっておきたい．しかし，それ以降は計算が大変でマークの解答枠に正しく答えるのは難しいだろう．状況を漏れなく把握しておくのも苦労しただろう．問題としてはあくまでやや難レベルだが，制限時間内に正しく解き切るという意味では難としている．

5. ［数学Ⅲの積分］（標準～やや難）

斜軸回転体の体積の問題．問題の誘導が丁寧であったので計算は煩雑だが正しく処理しきりたい．最後はベータ関数を知っていれば計算をショートカットできたかもしれない（もちろん傘型分割を用いてもよい）．

2025 年度前期と比較して，問題の分量が増え，難易度も上がり，得点しにくくなっている．制限時間内に解き切るのは難しいだろう．大問 1 で面食らった受験生も多かっただろう．今回のセットでは大問 2 を確実にとり，大問 3 と 5 でなるべく正答したい．大問 4 の確率は難しかったが (1) は正解させたいところである．前半の設問が解けなくても後半の設問が解ける箇所もいくつか見られたので落ち着いて立ち回りたい．目標は 40%.

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ