解答速報

川崎医科大学　数学

2026年 2月 1日実施

$\boxed{1}$　2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ があり，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，すべての自然数 n に対して，

（ア）　$S_n = 5n + 2^n - 1$

（イ）　$b_1 = \dfrac{11}{6}$，$b_{n+1} = \dfrac{6-2b_n}{5-2b_n}$

を満たしている。

(1)　$a_1 = \boxed{\text{ア}}$ であり，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{イ}}^{\,n-\boxed{\text{ウ}}} + \boxed{\text{エ}}$ である。

(2)　$b_2 = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。また，$c_n = \dfrac{2b_n - 3}{2b_n - 4}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおき，c_{n+1} を b_n を用いて表すと，

$$c_{n+1} = \frac{2b_n - \boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}\,b_n - \boxed{\text{ケ}}}$$

であり，数列 $\{c_n\}$ の一般項は，$c_n = \boxed{\text{コ}}\left(\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\right)^{n-\boxed{\text{ス}}}$ である。

したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は，$b_n = \dfrac{\boxed{\text{セ}}\cdot\boxed{\text{ソ}}^{\,n-1} + \boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{ソ}}^{\,n} + \boxed{\text{チ}}}$ である。

(3)　数列 $\{d_n\}$ は，$d_1 = 0$，$d_{2\left[\frac{n}{2}\right]+2} = d_n + 2$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たす。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。例えば，$[3] = 3$，$\left[\dfrac{16}{3}\right] = 5$ である。このとき，$d_n \geqq 223$ を満たす自然数 n の最小値は $\boxed{\text{ツテト}}$ である。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 4^n \cdot b_n}{\sum_{k=1}^{2n+1} a_k d_k} = \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。ただし，$|r| < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることを用いてもよい。

解答

解答記号	正解
ア	6
イ，ウ，エ	2，1，5
$\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\dfrac{7}{4}$
$\dfrac{2b_n-\text{キ}}{\text{ク}\,b_n-\text{ケ}}$	$\dfrac{2b_n-3}{4b_n-8}$
コ$\left(\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}\right)^{n-\text{ス}}$	$-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

解答記号	正解
$\dfrac{\text{セ}\cdot\text{ソ}^{n-1}+\text{タ}}{\text{ソ}^n+\text{チ}}$	$\dfrac{3\cdot 2^{n-1}+8}{2^n+4}$
ツテト	224
$\dfrac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$	$\dfrac{3}{8}$

解説

(1)　$n=1$ のとき，

$$a_1=S_1=5\cdot 1+2^1-1=\mathbf{6}$$

であり，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(5n+2^n-1)-\{5(n-1)+2^{n-1}-1\}\\&=5n+2^n-1-5n+5-2^{n-1}+1\\&=2^n-2^{n-1}+5\\&=2^{n-1}(2-1)+5=\mathbf{2}^{n-\mathbf{1}}+\mathbf{5}\end{aligned}$$

である．これは $n=1$ のときも成立する．

(2)

$$b_2=\frac{6-2b_1}{5-2b_1}=\frac{6-2\cdot\frac{11}{6}}{5-2\cdot\frac{11}{6}}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}$$

$c_n=\dfrac{2b_n-3}{2b_n-4}$ より

$$\begin{aligned}c_{n+1}&=\frac{2b_{n+1}-3}{2b_{n+1}-4}\\&=\frac{2\cdot\frac{6-2b_n}{5-2b_n}-3}{2\cdot\frac{6-2b_n}{5-2b_n}-4}\\&=\frac{2(6-2b_n)-3(5-2b_n)}{2(6-2b_n)-4(5-2b_n)}\\&=\frac{2b_n-\mathbf{3}}{\mathbf{4}b_n-\mathbf{8}}=\frac{2b_n-3}{2(2b_n-4)}=\frac{1}{2}c_n\end{aligned}$$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1=\dfrac{2b_1-3}{2b_1-4}=-2$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．

$$c_n=-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\mathbf{-}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{n-\mathbf{2}}$$

$c_n = \dfrac{2b_n - 3}{2b_n - 4}$ を b_n について解くと

$$c_n(2b_n - 4) = 2b_n - 3 \iff 2b_n(c_n - 1) = 4c_n - 3$$
$$\iff b_n = \frac{4c_n - 3}{2c_n - 2} \quad (\because\ c_n \fallingdotseq 1)$$

これに $c_n = -\dfrac{4}{2^n}$ を代入して

$$b_n = \frac{4\left(-\dfrac{4}{2^n}\right) - 3}{2\left(-\dfrac{4}{2^n}\right) - 2} = \frac{-\dfrac{16}{2^n} - 3}{-\dfrac{8}{2^n} - 2} = \frac{16 + 3 \cdot 2^n}{8 + 2 \cdot 2^n} = \frac{3 \cdot 2^n + 16}{2(2^n + 4)} = \boldsymbol{\frac{3 \cdot 2^{n-1} + 8}{2^n + 4}}$$

(3) $d_{2\left[\frac{n}{2}\right]+2} = d_n + 2 \cdots$① において $n = 2k$（k は自然数）とおくと，$d_{2k} = d_{2k-2} + 2$．また，① において，$n = 1$ を代入することにより $d_2 = d_1 + 2 = 2$ がわかるので，数列 $\{d_{2k}\}$ は初項 2，公差 2 の等差数列となり，$d_{2k} = 2k$ である．さらに，① において $n = 2k - 1$ とおくと，$d_{2k} = d_{2k-1} + 2$ となるので $d_{2k-1} = 2k - 2$ もわかる．これらは $d_n = 2\left[\dfrac{n}{2}\right]$ とまとめて表すことができる．このとき，

$$d_n = 2\left[\frac{n}{2}\right] \geqq 223 \iff \left[\frac{n}{2}\right] \geqq 111.5$$

これを満たす最小の自然数 n は **224** である．

$\{d_k\}$ は以下のような数列である．

$$\{d_n\} \ :\ 0,\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6,\ \cdots,\ 2n,\ 2n,\ \cdots$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+1} a_k d_k &= \sum_{k=1}^{2n+1} (2^{k-1} + 5) d_k \\
&= (2^0 + 5) \cdot 0 \\
&\quad + \{(2^1 + 5) \cdot 2 + (2^2 + 5) \cdot 2\} \\
&\quad + \{(2^3 + 5) \cdot 4 + (2^4 + 5) \cdot 4\} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \{(2^{2n-1} + 5) \cdot 2n + (2^{2n} + 5) \cdot 2n\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2k(3 \cdot 2^{2k-1} + 10) \\
&= 3\sum_{k=1}^{n} k \cdot 4^k + 20\sum_{k=1}^{n} k
\end{aligned}$$

ここで，$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot 4^k$ とおくと，

$$\begin{array}{rrcccccccccc}
 & T_n & = & 1 \cdot 4 & + & 2 \cdot 4^2 & + & \cdots & + & n \cdot 4^n & & \\
-) & 4T_n & = & & & 1 \cdot 4^2 & + & \cdots & + & (n-1) \cdot 4^n & + & n \cdot 4^{n+1} \\ \hline
 & -3T_n & = & 4 & + & 4^2 & + & \cdots & + & 4^n & - & n \cdot 4^{n+1}
\end{array}$$

より $T_n = \dfrac{4}{3}n \cdot 4^n - \dfrac{4}{9}(4^n - 1)$ である．また，$20\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 10n(n+1)$ であるので，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 4^n \cdot b_n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} a_k d_k} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 4^n \cdot \dfrac{3 \cdot 2^{n-1} + 8}{2^n + 4}}{4n \cdot 4^n - \dfrac{4}{3}(4^n - 1) + 10n(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\dfrac{3}{2} + \dfrac{8}{2^n}}{1 + \dfrac{4}{2^n}}}{4 - \dfrac{4}{3n}\left(1 - \dfrac{1}{4^n}\right) + \dfrac{10(n+1)}{4^n}} \\
&= \boldsymbol{\frac{3}{8}}
\end{aligned}$$

である．

$\boxed{2}$ 中心を O とする 1 辺の長さが 2 の正六角形 ABCDEF があり，辺 BC の中点を M，辺 CD の中点を N とする。また，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値は $\boxed{アイ}$ であり，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{b}$，$|\overrightarrow{AN}|=\sqrt{\boxed{キク}}$ である。また，2 直線 AM, BE の交点を G とすると，$\overrightarrow{BG}=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{b}$ である。

(2) 辺 DE 上に $\angle AMH=90^\circ$ となる点 H をとると，$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\vec{a}+\boxed{ス}\vec{b}$ である。3 点 A, M, H を通る円を O$'$ とし，円 O$'$ と直線 AB の交点で A でない方を I，点 O$'$ に関して点 M と対称な点を M$'$，線分 AM$'$ と辺 EF の交点を J とする。このとき，$\dfrac{AI}{AB}=\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ であり，$\overrightarrow{AJ}=\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\vec{b}$ である。

(3) 正六角形 ABCDEF の内接円と直線 AN の交点で N でない方を K とすると，$\overrightarrow{AK}=\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナニ}}\overrightarrow{AN}$ であり，$\triangle$AKD の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネノ}}$ である。

解答

解答記号	正解
アイ	-2
$\dfrac{ウ}{エ}\vec{a}+\dfrac{オ}{カ}\vec{b}$	$\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$
$\sqrt{キク}$	$\sqrt{13}$
$\dfrac{ケ}{コ}$	$\dfrac{1}{3}$

解答記号	正解
$\dfrac{サ}{シ}\vec{a}+ス\vec{b}$	$\dfrac{9}{5}\vec{a}+2\vec{b}$
$\dfrac{セ}{ソ}$	$\dfrac{4}{5}$
$\dfrac{タ}{チ}\vec{a}+\dfrac{ツ}{テ}\vec{b}$	$\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{5}{4}\vec{b}$
$\dfrac{ト}{ナニ}$	$\dfrac{1}{13}$
$\dfrac{\sqrt{ヌ}}{ネノ}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{13}$

解説

(1)　正六角形の一辺の長さは 2 であり，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ のなす角は 120° である．よって，内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{-2}$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \vec{a} + \vec{b}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \vec{a} + \vec{b}$ である．点 M は辺 BC の中点なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AM}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\vec{a} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{b}\end{aligned}$$

次に，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{b}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \frac{1}{2}\vec{b}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CN}} = (2\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}\vec{b} = 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$$

大きさの 2 乗を計算すると，

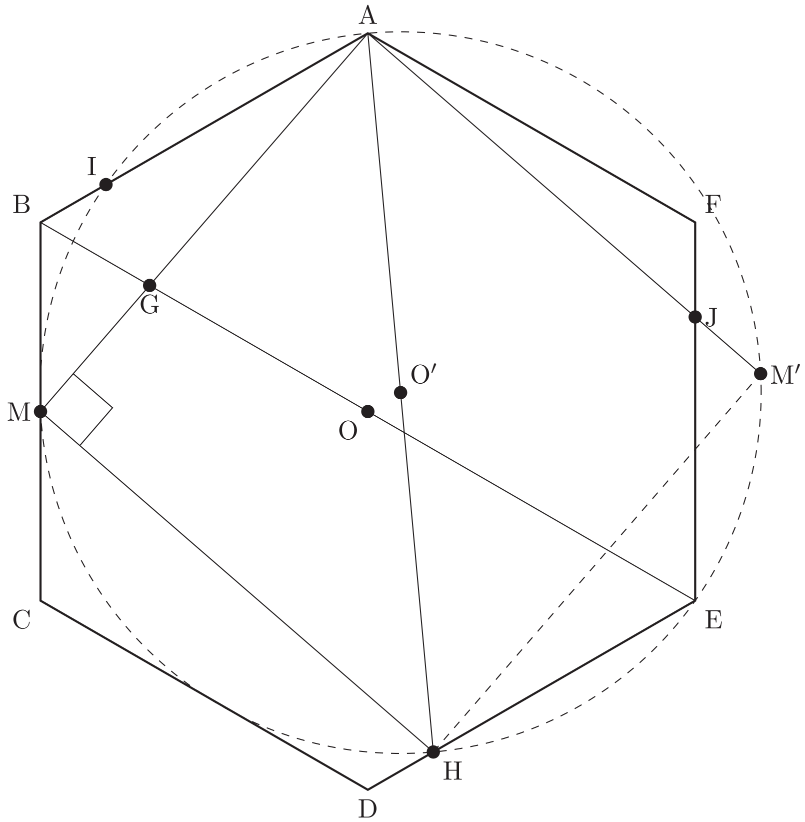
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AN}}|^2 &= \left|2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\right|^2 \\ &= 4|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{9}{4}|\vec{b}|^2 \\ &= 4 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) + \frac{9}{4} \cdot 4 \\ &= 16 - 12 + 9 = 13\end{aligned}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AN}}| = \sqrt{\mathbf{13}}$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = 2\vec{b}$ である．交点 G は直線 BE 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \vec{a} + k\vec{b}$ と表せる．また，G は直線 AM 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = s\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{3}{2}s\vec{a} + \frac{1}{2}s\vec{b}$ とも表せる．$\vec{a}$，$\vec{b}$ は一次独立なので，$\vec{a}$ の係数を比較して，

$$1 = \frac{3}{2}s \iff s = \frac{2}{3}$$

したがって $\vec{b}$ の係数から $k = \frac{1}{2}s = \frac{1}{3}$．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{BG}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{b}$ である．



(2)　点 H は辺 DE 上にあるので，実数 t を用いて内分点の公式より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\overrightarrow{\mathrm{AD}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

とおける．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = 2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t(2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}) + (1-t)(\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}) = (t+1)\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$$

条件 $\angle\mathrm{AMH} = 90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MH}} = 0$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{MH}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \left\{(t+1)\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\right\} - \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) = \left(t - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{a} + \frac{3}{2}\overrightarrow{b}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MH}} &= \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) \cdot \left\{\left(t - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{a} + \frac{3}{2}\overrightarrow{b}\right\} \\
&= \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)|\overrightarrow{a}|^2 + \left\{\frac{9}{4} + \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right\}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \frac{3}{4}|\overrightarrow{b}|^2 \\
&= \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot 4 + \left(\frac{9}{4} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot (-2) + \frac{3}{4} \cdot 4 \\
&= 5t - 4
\end{aligned}$$

$5t - 4 = 0$ より $t = \dfrac{4}{5}$．これを $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ の式に代入して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \left(\frac{4}{5} + 1\right)\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} = \boldsymbol{\frac{9}{5}}\overrightarrow{a} + \boldsymbol{2}\overrightarrow{b}$$

次に，点 I について考える．$\angle\mathrm{AMH} = 90^\circ$ より，円 O' は線分 AH を直径とする円である．点 I は円 O' 上にあるので，$\angle\mathrm{AIH} = 90^\circ$ となる（$\mathrm{I} \neq \mathrm{A}$）．I は直線 AB 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = l\vec{a}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{HI}} \perp \vec{a}$ より，

$$\begin{aligned} &(\overrightarrow{\mathrm{AI}} - \overrightarrow{\mathrm{AH}}) \cdot \vec{a} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &\left\{l\vec{a} - \left(\frac{9}{5}\vec{a} + 2\vec{b}\right)\right\} \cdot \vec{a} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &\left(l - \frac{9}{5}\right) \cdot 4 - 2 \cdot (-2) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &l = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

よって，$\dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\left|\frac{4}{5}\vec{a}\right|}{|\vec{a}|} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$.

点 M' は円の中心（AH の中点）に関して M と対称な点なので，四角形 AMHM' は長方形となる．よって $\overrightarrow{\mathrm{AM}'} = \overrightarrow{\mathrm{MH}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}'} = \left(\frac{9}{5}\vec{a} + 2\vec{b}\right) - \left(\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{3}{10}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$$

点 J は線分 AM' 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = u\overrightarrow{\mathrm{AM}'} = \dfrac{3}{10}u\vec{a} + \dfrac{3}{2}u\vec{b}$ とおける．また，点 J は辺 EF 上にある．$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{a} + 2\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = v\overrightarrow{\mathrm{AE}} + (1-v)\overrightarrow{\mathrm{AF}} = v(\vec{a} + 2\vec{b}) + (1-v)\vec{b} = v\vec{a} + (v+1)\vec{b}$$

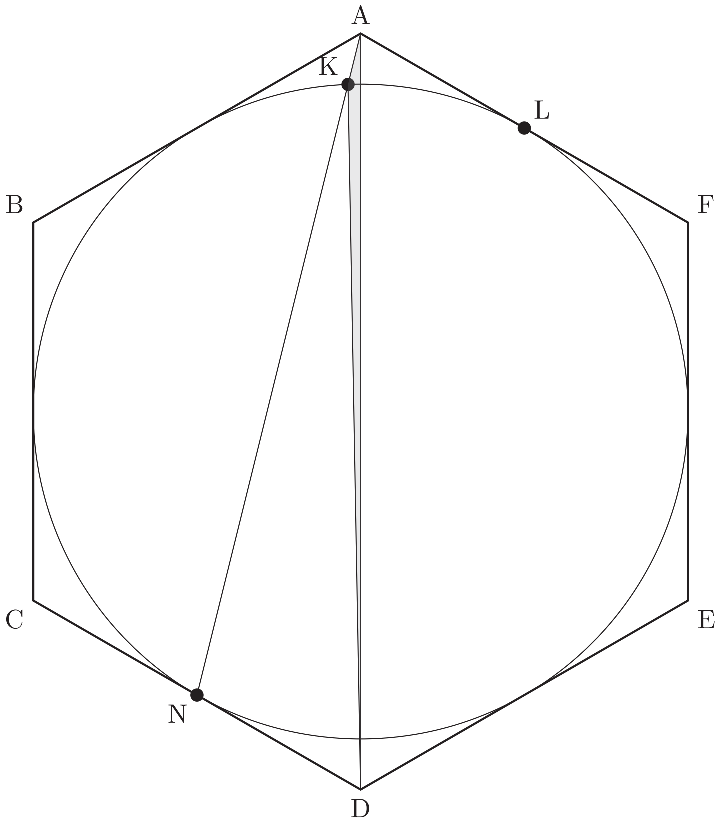
$\vec{a}$，$\vec{b}$ は一次独立なので，係数を比較して，

$$\begin{cases} \dfrac{3}{10}u = v \\ \dfrac{3}{2}u = v + 1 \end{cases}$$

これを解いて，$u = \dfrac{5}{6}$，$v = \dfrac{1}{4}$ と求まる．これを代入して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}\vec{a} + \boldsymbol{\frac{5}{4}}\vec{b}$$

(3)　点 A から引いた内接円への接線の接点を L とする．方べきの定理より，



$$\mathrm{AK} \cdot \mathrm{AN} = \mathrm{AL}^2 = 1$$

ここで $\mathrm{AN} = \sqrt{13}$ なので，$\mathrm{AK} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$．したがって，ベクトルの比は

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AN}}\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{13}}}{\sqrt{13}}\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}}\overrightarrow{\mathrm{AN}}$$

△AKD の面積について，底辺を AK とみると，△AND と高さが共通である．よって，面積比は底辺の比に等しく，$\mathrm{AC} \perp \mathrm{ND}$ より，

$$\triangle\mathrm{AKD} = \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AN}}\triangle\mathrm{AND} = \frac{1}{13}\triangle\mathrm{AND} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{ND} \cdot \mathrm{AC} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{13}}$$

$\boxed{3}$ a を定数とし，定義域がともに $0 \leqq x \leqq 2\pi$ である 2 つの関数 $f(x) = \sqrt{3}ax|\sin x|$, $g(x) = \sin x$ がある。O を原点とする座標平面上で，$y = f(x)$ のグラフを C_1, $y = g(x)$ のグラフを C_2 とし，C_1 は点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$ を通る。

(1) $a = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，C_1 上の点 $A_1\left(\dfrac{\pi}{2},\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ における接線 ℓ の方程式を $y = px + q$ とすると，$p = \boxed{\text{ウ}}$, $q = \boxed{\text{エ}}$ である。また，直線 ℓ と C_1 の A_1 以外の共有点 A_2 の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi$ であり，C_1 と線分 OA_1 で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\pi^{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}} - \boxed{\text{ケ}}$ である。さらに，C_1 と線分 A_1A_2 で囲まれた図形の面積は $\pi^{\boxed{\text{コ}}} - \boxed{\text{サ}}\pi$ である。

(2) t は $\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ を満たす実数とし，C_2 上の点 $(t,\ g(t))$ における接線と C_2 および 2 直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \pi$ で囲まれる図形の面積を $S(t)$ とする。このとき，

$$S(t) = \frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}\sin t - \left(\frac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}t - \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi^2\right)\cos t - \boxed{\text{タ}}$$

であり，$S(t)$ の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi - \boxed{\text{テ}}$ である。

(3) C_1 と C_2 の原点 O 以外の共有点のうち，O に最も近い点の x 座標を k とする。$0 \leqq x \leqq k$ の部分において C_1 と C_2 で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積は，$\pi\left(\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} - \dfrac{\sin\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} + \dfrac{\cos\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\right)$ である。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{\sqrt{ア}}{イ}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
ウ，エ	1，0
$\dfrac{オ}{カ}$	$\dfrac{3}{2}$
$\dfrac{\pi^{キ}}{ク}-ケ$	$\dfrac{\pi^2}{8}-1$
$\pi^{コ}-サ\pi$	$\pi^2-2\pi$

解答記号	正解
$\dfrac{\pi}{シ}$，$\dfrac{\pi}{ス}$，$\dfrac{セ}{ソ}$，タ	$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{8}$，1
$\dfrac{\sqrt{チ}}{ツ}\pi-テ$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi-1$
$\dfrac{ト}{ナ}$，$\dfrac{\sin ニ}{ヌ}$，$\dfrac{\cos ネ}{ノ}$	$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\sin 2}{8}$，$\dfrac{\cos 2}{4}$

解説

(1)　C_1 が点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$ を通るから，

$$\frac{\sqrt{3}}{6}\pi=\sqrt{3}a\cdot\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}$$

より $a=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$．したがって $f(x)=x|\sin x|$.

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき $f(x)=x\sin x$ であり，$f'(x)=\sin x+x\cos x$．$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$．よって接線 ℓ の方程式は

$$y=1\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\iff y=x$$

より $p=\mathbf{1}$，$q=\mathbf{0}$.

C_1 と ℓ の共有点は $x|\sin x|=x$ の解である．$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で解くと，$x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ である．よって A_1 以外の共有点の x 座標は 0 と $\dfrac{3}{2}\pi$ となるが，A_2 の x 座標は $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}\pi$ としておく．

$x\geqq 0$ のとき $|\sin x|\leqq 1$ より $x|\sin x|\leqq x$ であることに注意すると，$y=x$ と曲線 C_1 は下図のようになる．ここで，

$$\int x\sin x dx=-x\cos x+\int\cos x dx=-x\cos x+\sin x+C$$

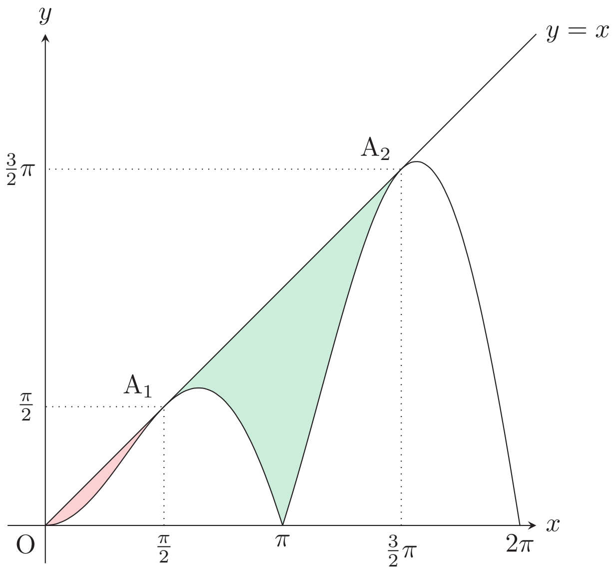
を用いると，C_1 と線分 OA_1 （直線 $y=x$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分）で囲まれた部分の面積は，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx\\&=\frac{\pi^2}{8}-\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{8}-1}\end{aligned}$$

となる．さらに，C_1 と線分 $\mathrm{A_1A_2}$ （直線 $y=x$ の $\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ の部分）で囲まれた部分の面積は，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi\right)\cdot\pi-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin x\,dx-\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(-x\sin x)\,dx \\
&=\pi^2-\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\Big[x\cos x-\sin x\Big]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \\
&=\pi^2-(\pi-1)-(1+\pi) \\
&=\pi^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}\pi
\end{aligned}$$

となる．



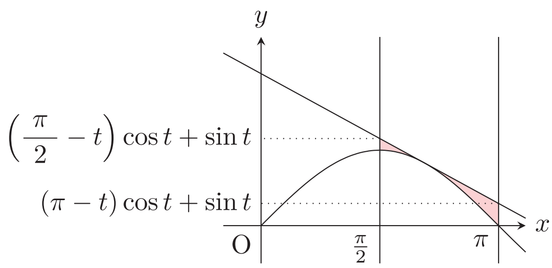
(2)　$C_2 : y=\sin x$ 上の点 $(t,\ \sin t)$ における接線の方程式は

$$y=(x-t)\cos t+\sin t$$

となるので，

$$\begin{aligned}
S(t)&=\frac{1}{2}\cdot\left\{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos t+\sin t+(\pi-t)\cos t+\sin t\right\}\cdot\frac{\pi}{2}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx \\
&=\frac{\pi}{4}\left\{\left(\frac{3}{2}\pi-2t\right)\cos t+2\sin t\right\}-\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&=\frac{\pi}{\mathbf{2}}\sin t-\left(\frac{\pi}{\mathbf{2}}t-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}\pi^2\right)\cos t-\mathbf{1}
\end{aligned}$$

である．



$S(t)$ を微分すると，

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{\pi}{2}\cos t - \left\{\frac{\pi}{2}\cos t + \left(\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{8}\pi^2\right)(-\sin t)\right\} \\ &= \left(\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{8}\pi^2\right)\sin t \\ &= \frac{\pi}{2}\left(t - \frac{3}{4}\pi\right)\sin t \end{aligned}$$

となるので，増減表は以下の通りである．

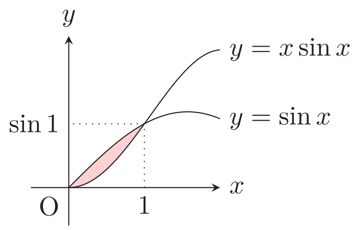
t	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$S'(t)$		$-$	0	$+$	0
$S(t)$		↘		↗	

したがって，求める最小値は

$$S\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}}\pi - \mathbf{1}$$

である．

(3)　$x\sin x = \sin x \iff (x-1)\sin x = 0$ の $x > 0$ における最小の解は $x = 1$．よって $k = 1$ である．$0 < x < 1$ において $\sin x > x\sin x$ であるから下図のようになる．



ここで，

$$\begin{aligned} &\int x^2\cos 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \int x\sin 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \int\frac{1}{2}\cos 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C \end{aligned}$$

を用いると，

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi(\sin x)^2\,dx - \int_0^1 \pi(x\sin x)^2\,dx \\
&= \pi\int_0^1 \left(\frac{1-\cos 2x}{2} - x^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx \\
&= \pi\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2\cos 2x\right)dx \\
&= \pi\Big[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x\Big]_0^1 \\
&= \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin 2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\sin 2 + \frac{1}{4}\cos 2 - \frac{1}{8}\sin 2\right) \\
&= \pi\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}} - \frac{\sin\mathbf{2}}{\mathbf{8}} + \frac{\cos\mathbf{2}}{\mathbf{4}}\right)
\end{aligned}
$$

である．

予想配点

$\boxed{1}$　33 点　(1) 3＋4　(2) 3＋4＋4＋5　(3) 5＋5

$\boxed{2}$　34 点　(1) 2＋4＋4＋4　(2) 4＋4＋4　(3) 4＋4

$\boxed{3}$　33 点　(1) 3＋3＋3＋4＋4（ウ，エは合わせて 3）　(2) 5＋5　(3) 6

講評

$\boxed{1}$［数列，数列の極限］（やや易～やや難）

(1), (2) は典型的な漸化式の問題なので高得点がほしい．(3) は，d_1，d_2，d_3，$\cdots$ を丁寧に調べて規則性を見つけられたかがカギだが，難度は高くこの設問ではあまり差がつかないだろう．

$\boxed{2}$［平面ベクトル］（標準）

正六角形に関して，線分と外接円や内接円との交点の位置ベクトルを考える問題であった．図形的に考えられる部分もあるが，素直に内積計算をしていけばよいだろう．この問題は処理力で差がつきそうである．なお，(2) が解けなくても (3) はそれに関係なく解ける．貪欲に得点をねらっていきたい．

$\boxed{3}$［数学Ⅲの微積分］（標準）

三角関数を用いて表された関数について，面積や体積を考える問題であった．(1), (2) は落とせない．(3) も，$\sin 2$，$\cos 2$ といった見慣れない値が現れるものの，定積分を丁寧に処理して正解がほしいところ．

昨年度と比較すると，方針を立てにくい問題の割合が減り，手が付きやすいセットになっている．大問 $\boxed{1}$(3) は難しく，全体的に分量が多いが，時間の許す限り処理を進めたい．1 次合格の目標は 60%．

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ