医学部進学予備校 メビオ
医学部専門予備校 YMS × 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

関西医科大学（後期）　数学

2026年 3月 7日実施

I　三角形 ABC において，辺 AB を $m:n$ に内分する点を P，辺 AC を $n:m$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を M とする。ただし，$m>0$，$n>0$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$ とおくとき，以下の設問に答えよ。

なお，(1)〜(3) の設問の答えは指定欄にそれぞれ記入し，それらの導出過程と (4) の解答は枠内に簡潔に記入すること。

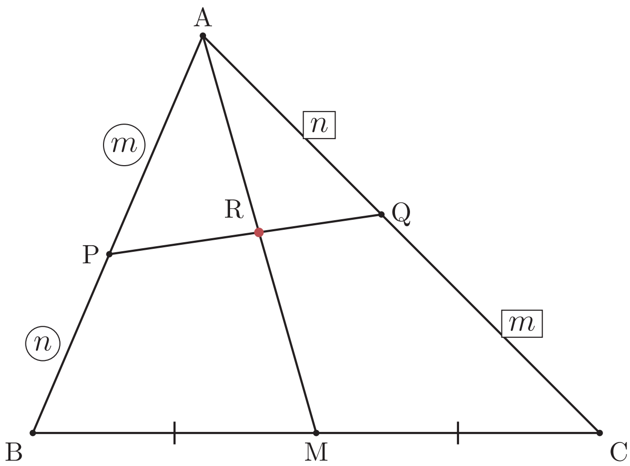
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　線分 AM と PQ の交点を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，m，n を用いて表せ。

(3)　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}}$ を m，n を用いて表せ。

(4)　線分 PQ が三角形 ABC の重心を通らないことを示せ。

解答



(1)　M は BC の中点なので，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ である.

(2)　R は PQ 上の点であるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{(1-t)m}{m+n}\vec{a}+\frac{tn}{m+n}\vec{b}\cdots①$$

とおける．また，R は AM 上の点であるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{k}{2}\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}\cdots②$$

とおける．$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は一次独立であるので，① と ② より

$$\begin{cases} \dfrac{(1-t)m}{m+n} = \dfrac{k}{2} \\ \dfrac{tn}{m+n} = \dfrac{k}{2} \end{cases}$$

を得る．これより $(1-t)m = tn \iff t(m+n) = m$ となり，$m+n>0$ より $t = \dfrac{m}{m+n}$ となる．

これを ① に代入して $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \boldsymbol{\dfrac{mn(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})}{(m+n)^2}}$ となる．

(3)　(2) より，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}} = k = \dfrac{2n}{m+n}\cdot t = \boldsymbol{\dfrac{2mn}{(m+n)^2}}$ である．

(4)　M は線分 BC の中点であるので，三角形 ABC の重心は線分 AM 上にある．重心が線分 PQ 上にあると仮定すると重心は R となる．重心の性質より，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}} = \dfrac{2}{3}$ であることから，

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}} = \frac{2}{3} \iff \frac{2mn}{(m+n)^2} = \frac{2}{3} \cdots ③$$

となる正の実数 $m,\ n$ が存在する．③ を変形すると $m^2 - mn + n^2 = 0$ となり，

$$m^2 - mn + n^2 = \left(m - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}n^2 > 0$$

より，③ を満たす実数 $m,\ n$ は存在しないので矛盾する．よって線分 PQ は三角形 ABC の重心を通らない．
(証明終)

別解

(③の左辺) $= \dfrac{2}{\left(\dfrac{m+n}{\sqrt{mn}}\right)^2} = \dfrac{2}{\left(\sqrt{\dfrac{m}{n}}+\sqrt{\dfrac{n}{m}}\right)^2}$ であり，$\sqrt{\dfrac{m}{n}} > 0,\ \sqrt{\dfrac{n}{m}} > 0$ であることから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} \geqq 2\sqrt{\sqrt{\frac{m}{n}}\cdot\sqrt{\frac{n}{m}}} = 2$$

が成り立つ．ゆえに $\dfrac{2}{\left(\sqrt{\dfrac{m}{n}}+\sqrt{\dfrac{n}{m}}\right)^2} \leqq \dfrac{2}{2^2} = \dfrac{1}{2}$ となり，③ を満たす実数 $m,\ n$ は存在しないので矛盾する．よって線分 PQ は三角形 ABC の重心を通らない．　(証明終)

II　$t > 0$ を満たす定数 t を用いて，関数 $f(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $f(x) = \dfrac{(t^2-1)x(1-x)}{t^2x+(1-x)}$ と定める。以下の設問に答えよ。

なお，(1)〜(3) の設問の答えは指定欄にそれぞれ記入し，それらの導出過程と (4) の解答は枠内に簡潔に記入すること。

(1)　$t = 1$ のときの $f(x)$ を求めよ。

(2)　$f(0)$ と $f(1)$ を求めよ。

(3)　$f(x)$ が，極大値をとる t の範囲と，極小値をとる t の範囲を，それぞれ求めよ。

(4)　(3) で求めた，$f(x)$ が極値をとる範囲を t が動くものとする。$f(x)$ が極値をとるときの x と，そのときの極値 y とを用いて $(x,\ y)$ と表される点が描く軌跡を xy 平面上に図示せよ。

解答

まず $f(x)$ の分母を $g(x) = t^2x + (1-x)$ とおくと，$g(x)$ は $(0,\ 1)$ と $(1,\ t^2)$ を結ぶ一次関数だから $g(x) > 0$ であることがわかる.

(1)　$t = 1$ を代入すると $\boldsymbol{f(x)} = \dfrac{(1^2-1)x(1-x)}{1^2x+(1-x)} \boldsymbol{= 0}$ である.

(2)　分子が $x(1-x)$ の定数倍なので，$\boldsymbol{f(0) = 0}$，$\boldsymbol{f(1) = 0}$.

(3)　$f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (t^2-1)\cdot\frac{(1-2x)\{(t^2-1)x+1\}-(x-x^2)(t^2-1)}{\{(t^2-1)x+1\}^2} \\ &= (t^2-1)\cdot\frac{(1-t^2)x^2-2x+1}{\{(t^2-1)x+1\}^2} \\ &= (t^2-1)\cdot\frac{\{(1+t)x-1\}\{(1-t)x-1\}}{\{(t^2-1)x+1\}^2} \end{aligned}$$

(i)　$t = 1$ のときは $f(x) = 0$ なので極値は持たない.

(ii)　$0 < t < 1$ のとき $t^2 - 1 < 0$, $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{1+t} < 1$, $1 < \dfrac{1}{1-t}$ に注意して $0 \leqq x \leqq 1$ において増減表を書くと

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{1+t}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0

(iii)　$1 < t$ のとき $t^2 - 1 > 0$, $0 < \dfrac{1}{1+t} < \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{1-t} < 0$ に注意して $0 \leqq x \leqq 1$ において増減表を書くと

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{1+t}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

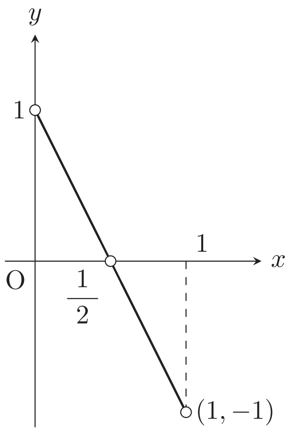
したがって $f(x)$ が極大値をとる t の範囲は $\boldsymbol{t > 1}$，極小値をとる t の範囲は $\boldsymbol{0 < t < 1}$ である.

(4)　極大値，極小値いずれをとる場合も，$x = \dfrac{1}{1+t}$ である（ただし $0 < t < 1,\ 1 < t$）.

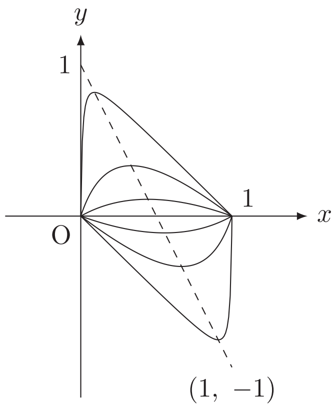
$X = \dfrac{1}{1+t}$ とおく．t の範囲から $0 < X < \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2} < X < 1$ であることがわかる．この場合極値 Y は

$$Y = f(X) = f\left(\frac{1}{1+t}\right) = \frac{(t^2-1)\dfrac{1}{1+t}\cdot\dfrac{t}{1+t}}{t^2\dfrac{1}{1+t}+\dfrac{t}{1+t}} = \frac{t-1}{t+1} = 1 - \frac{2}{t+1} = 1 - 2X$$

したがって求める軌跡は $\boldsymbol{y = 1 - 2x}$ **の** $\boldsymbol{0 < x < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < x < 1}$ **の部分**であり，下図の通り．



参考　$t = 0.1,\ 0.5,\ 0.8,\ 1.25,\ 2,\ 10$ に対して $f(x)$ のグラフを描くと，次のようになっている．曲線は下から順に $t = 0.1,\ 0.5,\ 0.8,\ 1.25,\ 2,\ 10$ に対応している．破線は $y = 1 - 2x$ である．



III　n は正の整数，m は 2 以上の整数とする。袋の中には m 個の玉が入っており，1 個が赤玉，残りが白玉である。この袋の中から 1 個の玉を無作為に取り出す。もし，取り出した玉が白玉の場合は玉を袋に戻してから玉の取り出しを繰り返し，取り出した玉が赤玉の場合はその段階で操作を終了する。ちょうど n 回目に赤玉を取り出して操作が終了する確率を P_n とする。

また，$E_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP_k$ とする。以下の設問に答えよ。

なお，各設問の答えを指定欄にそれぞれ記入するとともに答えの導出過程は枠内に簡潔に記入すること。

(1)　P_n を m，n を用いて表せ。

(2)　E_n を m，n を用いて表せ。

(3)　操作を終了するまでの取り出し回数の期待値を m を用いて表せ。

ただし，$0 < r < 1$ のときに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることを用いてよい。

解答

1 回の試行において，赤玉を取り出す確率は $\dfrac{1}{m}$，白玉を取り出す確率は $\dfrac{m-1}{m}$ である．

(1)　1 回目から $n-1$ 回目まで白玉を取り出し，n 回目に赤玉を取り出せばよいので，求める確率は

$$\boldsymbol{P_n = \frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1}}$$

(2)　$E_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{m}\right)^{k-1}$ であるので，

$$\begin{array}{rrl}
 & mE_n & = 1\cdot 1 + 2\cdot\dfrac{m-1}{m} + 3\cdot\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^2 + \cdots + n\cdot\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^{n-1} \\
-) & (m-1)E_n & = \qquad 1\cdot\dfrac{m-1}{m} + 2\cdot\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^2 + \cdots + (n-1)\cdot\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^{n-1} + n\cdot\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^n \\
\hline
 & E_n & = 1 + \dfrac{m-1}{m} + \left(\dfrac{m-1}{m}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{m-1}{m}\right)^{n-1} - n\cdot\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^n
\end{array}$$

であるので，

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{1-\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^n}{1-\dfrac{m-1}{m}} - n\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^n \\
&= \boldsymbol{m - (m+n)\left(\frac{m-1}{m}\right)^n}
\end{aligned}$$

(3)　操作を終了するまでの取り出し回数の期待値は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} E_n$ である．ここで $0 < \dfrac{m-1}{m} < 1$ なので，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} m\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^n = 0$ である．また，$0 < r < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることを用いると，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^n = 0$ である．したがって，求める期待値は

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E_n &= \lim_{n\to\infty}\left\{m - (m+n)\left(\frac{m-1}{m}\right)^n\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{m - m\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^n - n\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^n\right\} \\
&= \boldsymbol{m}
\end{aligned}$$

である．

注釈

成功確率が p である独立試行を繰り返して，初めて成功するまでの試行回数 X の分布を 幾何分布 という．

1 回目の試行の後に，さらに必要となる試行回数を Y とすると，$X = 1 + Y$ である．ここで，

- 1 回目に成功すれば $Y = 0$
- 1 回目に失敗する確率は $1 - p$ であり，そのとき 2 回目以降は最初と同じ状況になるから，1 回目に失敗したという条件のもとでの Y の分布は X の分布と同じ

である．したがって，

$$E(Y) = 0 \cdot p + E(X) \cdot (1 - p) = (1 - p)E(X)$$

となる．よって，

$$E(X) = 1 + E(Y) = 1 + (1 - p)E(X)$$

より，$E(X) = \dfrac{1}{p}$ となる．

このことは，成功確率が $\dfrac{1}{m}$ であるとき，初めて成功するまでにかかる回数の平均が m であるという直感と一致する．

Ⅳ　xyz 空間において，以下の条件をすべて満たす部分を立体 T とする。

$$|x| \leqq 3,\ |y| \leqq 3,\ |z| \leqq 3$$
$$|x|+|y| \leqq 4,\ |x|+|z| \leqq 4,\ |y|+|z| \leqq 4$$
$$|x|+|y|+|z| \leqq 5$$

以下の設問に答えよ。

なお，(1)，(2) の設問の答えは指定欄にそれぞれ記入し，それらの導出過程は枠内に簡潔に記入すること。

(1)　T の体積 V を求めよ。

(2)　T の表面積 S を求めよ。

解答

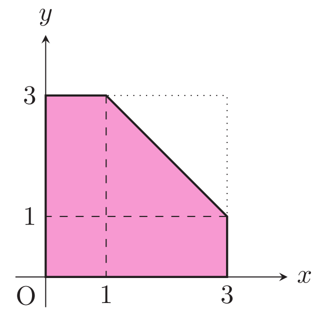
立体 T は xy 平面，yz 平面，zx 平面の各座標平面について対称であるので，まず $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ の部分のみを考える．このとき与えられた条件式は

$$0 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq 3,\ 0 \leqq z \leqq 3, \quad x+y \leqq 4,\ y+z \leqq 4,\ z+x \leqq 4, \quad x+y+z \leqq 5$$

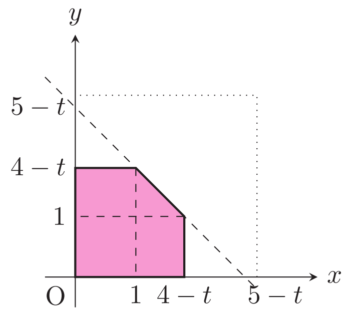
となる．この立体を T′ とする．

(1)　立体 T′ を平面 $z=t\ (0 \leqq t \leqq 3)$ で切った断面を考える．

(i)　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき断面は右の図のようになりこの部分の体積は
$\left(3 \cdot 3 - \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\right) \times 1 = 7$ である．



(ii)　$1 \leqq t \leqq 3$ のとき断面は右の図のようになる．この断面積を $f(t)$ とおくと，



$$f(t) = \frac{1}{2}(5-t)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \times 2 = \frac{1}{2}(t-5)^2 - 1$$

なので T′ の $1 \leqq z \leqq 3$ の部分の体積は

$$\int_1^3 f(t)dt = \left[\frac{1}{6}(t-5)^3 - t\right]_1^3 = \frac{22}{3}$$

これより T′ の体積は $7 + \dfrac{22}{3} = \dfrac{43}{3}$ となる．

T の体積は T′ の 8 倍なので求める体積は $V = \dfrac{43}{3} \times 8 = \boldsymbol{\dfrac{344}{3}}$ である．

別解

T′ の体積は次のように出すこともできる．

(i)　一辺の長さが 1 の立方体（$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1$）が 1 つ

(ii)　一辺の長さが 1 の正方形を底面とする高さ 2 の直方体（T′ のうち $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 1 \leqq z \leqq 3$ など）が 3 つ

(iii)　三辺の長さが $2,\ 2,\ 2\sqrt{2}$ の直角三角形を底面とする高さ 1 の三角柱（T′ のうち $0 \leqq x \leqq 1,\ 1 \leqq y \leqq 3,\ 1 \leqq z \leqq 3$ など）が 3 つ

(iv)　三辺の長さが $2,\ 2,\ 2\sqrt{2}$ の直角三角形を底面とする高さ 2 の三角錐（T′ のうち $1 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 3,\ 1 \leqq z \leqq 3$ ）が 1 つ

と分割して

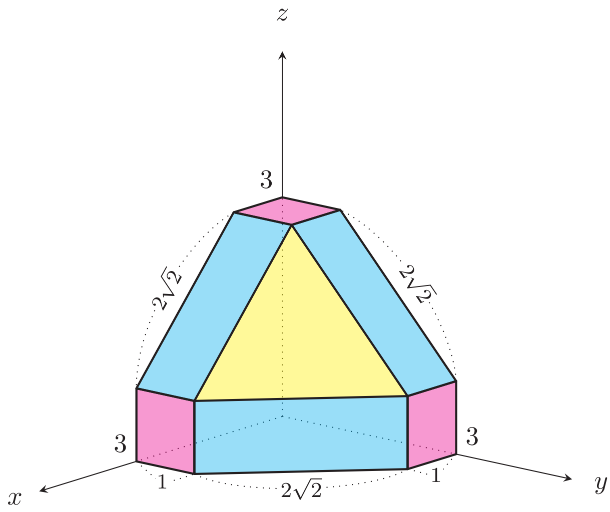
$$1^3+1^2\cdot 2\times 3+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 1\times 3+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{1}{3}=\frac{43}{3}$$

(2) T′ の表面積のうち T の表面と重なる部分の面積を求める．

(i) 各座標平面と平行な面は一辺の長さが 1 の正方形であり（右図の赤），これが 3 つあるのでその面積は合わせて $1\cdot 1\times 3=3$ である．

(ii) (i) の 3 つの正方形の間にある 3 つの長方形は縦横の長さが 1, $2\sqrt{2}$ なので（右図の青），その面積は合わせて $1\cdot 2\sqrt{2}\times 3=6\sqrt{2}$ である．

(iii) (ii) の長方形に囲まれた図形は一辺の長さが $2\sqrt{2}$ の正三角形なので（右図の黄），その面積は $\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$ である．



以上より対称性を考慮し求める表面積は

$$S=\left(3+6\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\times 8=\mathbf{24+48\sqrt{2}+16\sqrt{3}}$$

予想配点

Ⅰ　40 点　(1) 5　(2) 15　(3) 10　(4) 10

Ⅱ　40 点　(1) 5　(2) 6　(3) 16　(4) 13

Ⅲ　35 点　(1) 5　(2) 20　(3) 10

Ⅳ　35 点　(1) 20　(2) 15

講評

Ⅰ［平面ベクトル］(やや易～標準)

三角形の内部に引いた線分の交点についての位置ベクトルの問題．文字が絡むが内容は平易である．(4) で方針に戸惑った受験生もいるだろうが，ここは完答がほしい．

Ⅱ［数学Ⅲの微分］(やや難)

分数関数の増減を微分して調べる問題．文字定数 t を含むことによって，導関数の正負などの議論が複雑になる．完答するには根気強く議論する必要がある．

Ⅲ［確率，極限］(標準)

袋の中から玉を復元抽出する問題．方針自体はあまり迷うことはないだろう．文字が 2 種あるので計算がやや複雑になるが，なんとか完答をねらいたい．

Ⅳ［空間座標，数学Ⅲの積分］(やや難)

x, y, z についての不等式で表された立体の体積と表面積を求める問題．まずは x, y, z が 0 以上のときに絞って考えるとよいだろう．不等式自体は単純だが，体積を求める際には平面 $z=t$ での断面を考えればよい，と着想できたかがポイント．表面積の方は，立体の形状がつかめないと厳しいだろう．

例年通り，大問 4 問の出題であった．難問も出題されているが，手をつけやすい問題もあるので，それらで粘り強く得点を稼ぎたい．目標は 65%.