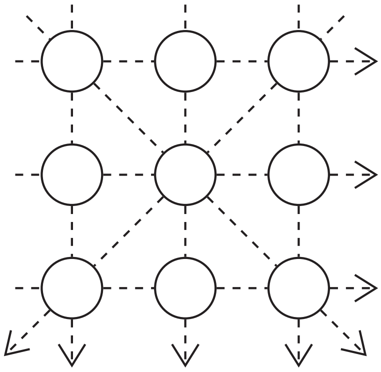
医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS × 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

関西医科大学（前期）　数学

2026年 1月 31日実施

Ⅰ　下図のように，◯ で表される位置に，縦に 3 列，横に 3 行，合計 9 枚のコインが並んでいて，最初はすべてのコインが裏を向いている。これらのコインに対して，次のような操作を行う。



- 1 枚目のコインとして，中央のコインを表に向ける。
- 2 枚目以降は，その時点で裏向きのコインの中から無作為に 1 枚を選び，そのコインを表に向ける。
- 表を向いたコインが，縦，横，斜めの列のどこでも良いので 3 枚並ぶ列ができたら，そこで操作を終了する。

ちょうど n 枚目のコインを表に向けた時点で操作が終了する確率を P_n とする。以下の設問に答えよ。

なお，各設問の答えを指定欄にそれぞれ記入するとともに答えの導出過程は枠内に簡潔に記入すること。

(1)　P_1，P_2，P_3 をそれぞれ求めよ。(答えだけで良い)

(2)　P_4 を求めよ。

(3)　P_7，P_8，P_9 をそれぞれ求めよ。

(4)　操作を終了するまでに，表に向けるコインの枚数の期待値を求めよ。

解答

Ⅰ

(1)　表を向いたコインが，縦，横，斜めの列のどこでもよいので 3 枚並ぶ列ができる状態（以下，ビンゴと呼ぶ）になるためには，表を向いたコインが少なくとも 3 枚必要なので，$P_1 = \mathbf{0}$，$P_2 = \mathbf{0}$ である．

中央のコイン 1 枚と，それ以外の $n-1$ 枚のコイン，計 n 枚のコインが表を向いているときの表向きのコインの配置は ${}_8\mathrm{C}_{n-1}$ 通りであり，これらは同様に確からしい．

$n = 3$ のときにビンゴになるものは，図 1 の 4 通りである．よって，$P_3 = \dfrac{4}{{}_8\mathrm{C}_2} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$ である．

(2)　以下，n 回までにビンゴとなる確率を Q_n とする．すなわち $Q_n = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ である．

4 枚の表向きのコインでビンゴとなるものは，図 1 からさらに 1 枚表向きにしたものの 4×6 通りと，図 2 の 4 通りである．

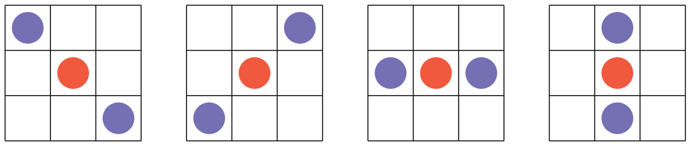


図 1　中央を含むビンゴ

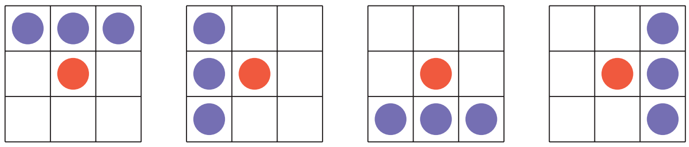


図 2　中央を含まないビンゴ

よって，$Q_4 = \dfrac{4 \times 6 + 4}{{}_8\mathrm{C}_3} = \dfrac{1}{2}$ となるので，$P_4 = Q_4 - Q_3 = \mathbf{\dfrac{5}{14}}$ である．

(3)　表向きのコインが 6 枚あれば必ずビンゴとなるので，$P_7 = \mathbf{0}$，$P_8 = \mathbf{0}$，$P_9 = \mathbf{0}$ である．

(4)　5 枚で 中央を含むビンゴ ができないものは，図 3 において A，B，C，D からそれぞれ 1 つずつ表にしたものなので 2^4 通りである．よって，中央を含むビンゴができる確率は $1 - \dfrac{2^4}{{}_8\mathrm{C}_4}$ である．

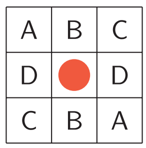


図 3　中央を含むビンゴができない選び方

一方，5 枚で 中央を含まないビンゴ ができるのは，図 2 からさらに 1 枚表向きにしたものの 4×5 通りである．

そして，5 枚で 中央を含むビンゴ と 中央を含まないビンゴ の両方ができるのは，図 4 左の回転・反転の 8 通りと，図 4 右の回転の 4 通りである．

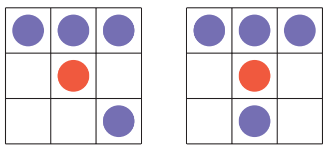


図 4　中央を含む列と含まない列が同時に成立する配置

したがって，

$$Q_5 = \left(1 - \frac{2^4}{{}_8\mathrm{C}_4}\right) + \frac{4 \times 5}{{}_8\mathrm{C}_4} - \frac{8+4}{{}_8\mathrm{C}_4} = \frac{31}{35}$$

であり，$P_5 = Q_5 - Q_4 = \dfrac{27}{70}$ である．また，6 枚表にすれば必ずビンゴになるので $Q_6 = 1$ となることから，

$$P_6 = Q_6 - Q_5 = 1 - \frac{31}{35} = \frac{4}{35}$$

である．

以上より求める期待値は

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{7} + 4 \cdot \frac{5}{14} + 5 \cdot \frac{27}{70} + 6 \cdot \frac{4}{35} + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 0 = \mathbf{\frac{313}{70}}$$

である．

別解

(2)　3 枚でビンゴにならないものは，回転・反転を同一視すると図 5 の 4 パターンある．

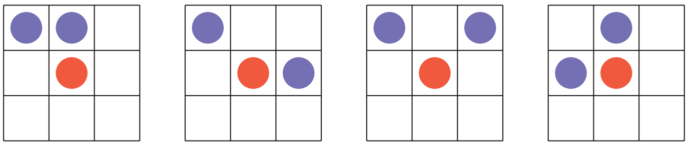
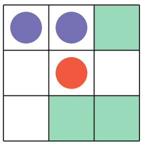
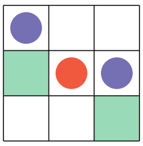


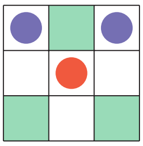
図 5　表 3 枚でビンゴになっていないもの



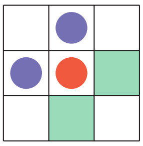
このパターンの回転・反転は 8 通りあり，次の 1 枚でビンゴになるのは 3 通りある．



このパターンの回転・反転は 8 通りあり，次の 1 枚でビンゴになるのは 2 通りある．



このパターンの回転は 4 通りあり，次の 1 枚でビンゴになるのは 3 通りある．



このパターンの回転は 4 通りあり，次の 1 枚でビンゴになるのは 2 通りある．

したがって，

$$P_4 = \frac{8}{{}_8\mathrm{C}_2}\cdot\frac{3}{6} + \frac{8}{{}_8\mathrm{C}_2}\cdot\frac{2}{6} + \frac{4}{{}_8\mathrm{C}_2}\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{{}_8\mathrm{C}_2}\cdot\frac{2}{6} = \mathbf{\frac{5}{14}}$$

である．

(4)　4 枚でビンゴにならないものは，回転・反転を同一視すると図 6 の 5 パターンある．

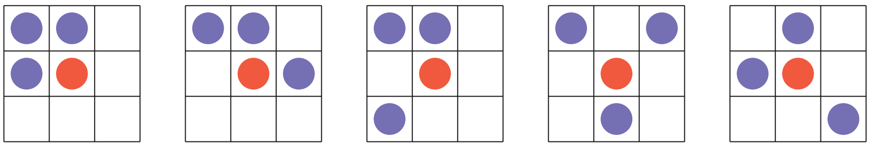
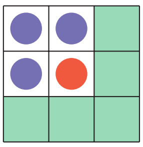
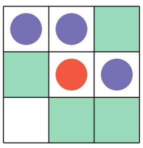


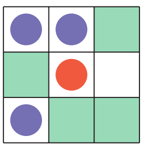
図 6　表 4 枚でビンゴになっていないもの



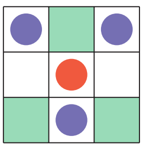
このパターンの回転は 4 通りあり，次の 1 枚でビンゴになるのは 5 通りある．



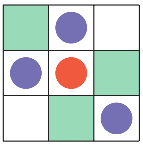
このパターンの回転・反転は 8 通りあり，次の 1 枚でビンゴになるのは 4 通りある．



このパターンの回転・反転は 8 通りあり，次の 1 枚でビンゴになるのは 4 通りある．



このパターンの回転は 4 通りあり，次の 1 枚でビンゴになるのは 3 通りある．



このパターンの回転は 4 通りあり，次の 1 枚でビンゴになるのは 3 通りある．

したがって，

$$P_5 = \frac{4}{{}_8\mathrm{C}_3} \cdot \frac{5}{5} + \frac{8}{{}_8\mathrm{C}_3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{8}{{}_8\mathrm{C}_3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{{}_8\mathrm{C}_3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{{}_8\mathrm{C}_3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{70}$$

である．

5 枚でビンゴとならないものは，図 7 の回転・反転の 8 通りである．あと 1 枚を表にすれば必ずビンゴになるので，$P_6 = \dfrac{8}{{}_8\mathrm{C}_4} = \dfrac{4}{35}$ である．

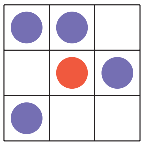


図 7　5 枚でビンゴとならないもの

II　$n,\ k,\ m$ を正の整数とする。数列 1, 3, 2, 1, 5, 4, 3, 2, 1, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 9, $\cdots$ がある。この数列を $\{a_n\}$ とし，$\{a_n\}$ を $1 \mid 3,\ 2,\ 1 \mid 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1 \mid 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1 \mid 9,\ \ldots.$ のように群に分けると，第 k 群は初項 $2k-1$，末項 1，公差 -1 の等差数列となる。また数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。以下の設問に答えよ。

なお，各設問の答えを指定欄にそれぞれ記入するとともに答えの導出過程は枠内に簡潔に記入すること。

(1)　n が $n = m^2+1$ と表されるとき，a_n を m を用いて表せ。

(2)　n が $n = m^2$ と表されるとき，S_n を m を用いて表せ。

(3)　S_{101} の値を求めよ。

(4)　$S_n \geqq 2026$ を満たす最小の n を求めよ。

解答

第 N 群の末項は最初から数えて $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(2k-1) = N^2 \cdots$① 項目である.

また, 第 N 群内の項の総和は $(2N-1)+(2N-2)+\cdots+2+1 = \dfrac{\{(2N-1)+1\}\cdot(2N-1)}{2} = N(2N-1)\cdots$② である.

(1)　$n = m^2+1$ のとき ① より $a_n = a_{m^2+1}$ は第 m 群の末項 a_{m^2} の次の項なので，第 $m+1$ 群の初項，すなわち $2(m+1)-1 = \boldsymbol{2m+1}$ である.

(2)　$n = m^2$ のとき $S_n = S_{m^2} = a_1 + a_2 + \cdots a_{m^2}$ は第 m 群の末項までの総和である. したがって ② より

$$S_n = S_{m^2} = \sum_{N=1}^{m} N(2N-1) = 2\cdot\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) - \frac{1}{2}m(m+1) = \boldsymbol{\frac{1}{6}m(m+1)(4m-1)}$$

である.

(3)　$101 = 10^2+1$ なので，(1), (2) より

$$S_{101} = S_{10^2} + a_{10^2+1} = \frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 39 + 21 = \mathbf{736}$$

である.

(4)

$$S_{14^2} = \frac{1}{6}\cdot 14\cdot 15\cdot 55 = 1925\ < 2026 <\ S_{15^2} = \frac{1}{6}\cdot 15\cdot 16\cdot 59 = 2360$$

なので，$S_n \geqq 2026$ を満たす最小の n は $14^2 < n \leqq 15^2$ の範囲，つまり a_n は第 15 群の項となる. 第 15 群の初項は $a_{14^2+1} = a_{197} = 29$ である.

$$S_{14^2} + a_{197} + a_{198} + a_{199} = 1925 + 29 + 28 + 27 = 2009\ < 2026 <\ 2009 + a_{200} = 2009 + 26 = 2035$$

なので求める n の最小値は $\mathbf{200}$ である.

III 実数 u と v が，条件 $|u+v| \leqq 1$ と $|u-2v| \leqq 1$ を同時に満たす。また点 A$(x,\ y)$ の座標が u と v を用いて $(u^2+2v^2,\ u^2-2uv+3v^2)$ と表される。以下の設問に答えよ。

(1) $t=u+v,\ s=u-2v$ とおくとき，点 A の座標 $(x,\ y)$ を t と s を用いて表せ。

(2) xy 平面において点 A の存在しうる領域を図示し，その面積を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $t=u+v,\ s=u-2v$ より，$u=\dfrac{2t+s}{3},\ v=\dfrac{t-s}{3}$ であるから，

$$\begin{aligned} x &= u^2+2v^2 \\ &= \left(\frac{2t+s}{3}\right)^2+2\left(\frac{t-s}{3}\right)^2 \\ &= \frac{2t^2+s^2}{3} \\ y &= u^2-2uv+3v^2 \\ &= \left(\frac{2t+s}{3}\right)^2-2\cdot\frac{2t+s}{3}\cdot\frac{t-s}{3}+3\left(\frac{t-s}{3}\right)^2 \\ &= \frac{t^2+2s^2}{3} \end{aligned}$$

ゆえに，点 A の座標 $(x,\ y)$ は，$\boldsymbol{\left(\dfrac{2t^2+s^2}{3},\ \dfrac{t^2+2s^2}{3}\right)}$ である．

(2) (1) より，$3x=2t^2+s^2,\ 3y=t^2+2s^2$ である．これを $t^2,\ s^2$ について解いて，

$$t^2=2x-y,\quad s^2=2y-x$$

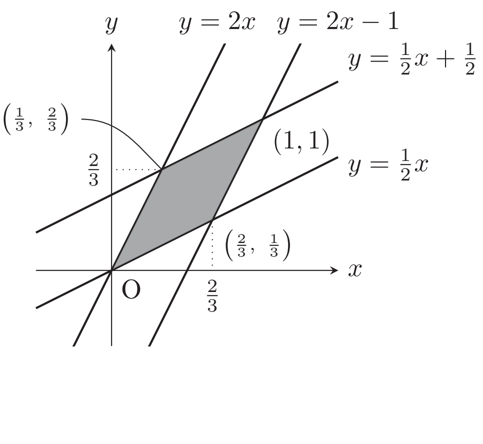
となる．ここで，$|u+v| \leqq 1,\ |u-2v| \leqq 1$ であるから，$|s| \leqq 1,\ |t| \leqq 1$ より，$0 \leqq s^2 \leqq 1,\ 0 \leqq t^2 \leqq 1$ である．したがって，

$$0 \leqq 2y-x \leqq 1,\ 0 \leqq 2x-y \leqq 1 \iff \begin{cases} \dfrac{1}{2}x \leqq y \leqq \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} \\ 2x-1 \leqq y \leqq 2x \end{cases}$$

を得る．

これより，点 A の存在しうる領域は，右図灰色部分で境界線上の点を含む．O$(0,\ 0)$，P$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$，Q$\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ とおくと，この領域は平行四辺形であるから，その面積は △OPQ の面積の 2 倍である．ゆえに，求める面積を S とすると，

$$S=2\times\frac{1}{2}\left|\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right|=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$



Ⅳ　xy 平面において，円 O_1 は x 軸に原点で接しつつ，放物線 $y = x^2$ 上の原点以外の点 A を通る。円 O_2 は x 軸と接しつつ，点 A で O_1 に外接する。これらの条件を満たしながら点 A が動くとき，O_2 の中心が描く軌跡を C とする。ただし，C には原点を含めるものとする。また，点 A の位置を変化させて O_1 と O_2 の半径が等しくなるときに，これら 2 つの円の中心を通る直線を l とおく。点 A の x 座標を t として，以下の設問に答えよ。
なお，各設問の答えを指定欄にそれぞれ記入するとともに答えの導出過程は枠内に簡潔に記入すること。

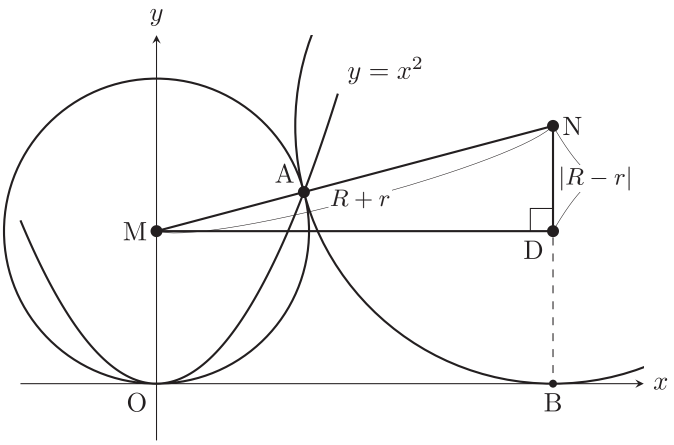
(1)　O_1 の半径を t を用いて表せ。
(2)　O_2 の中心の座標を t を用いて表せ。
(3)　l の方程式を求めよ。
(4)　C と l とで囲まれた部分の面積を求めよ。

解答

(1)　A の座標は $(t,\ t^2)$ であり，原点とは異なるので $t \fallingdotseq 0$ である．円 O_1 の半径を r，中心を M とする．M の座標は $(0,\ r)$ である．OM, AM はいずれも O_1 の半径であるから

$$\begin{aligned} &\mathrm{OM}^2 = \mathrm{AM}^2 \\ \iff\ & r^2 = (t-0)^2 + (t^2 - r)^2 \\ \iff\ & 2t^2 r = t^2 + t^4 \\ \iff\ & \boldsymbol{r = \frac{1+t^2}{2}} \quad (\because\ t \fallingdotseq 0) \end{aligned}$$

(2)　以下は $t > 0$ で考える．
円 O_2 の半径を R，中心を N とする．N から x 軸へ下ろした垂線の足を B とし，M から直線 NB に下ろした垂線の足を D とする．



2 つの円 O_1, O_2 は点 A で外接しているので，2 円の中心 M, N を通る直線は点 A を通り，その直線の傾きは直線 MA の傾きと等しい．直線 MA の傾きは，

$$\frac{t^2 - \dfrac{1+t^2}{2}}{t - 0} = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

である．$t = 1$ のときは MA の傾きは 0 であり，M(0, 1), A(1, 1) であるから明らかに N(2, 1) である．以下，$t > 0,\ t \fallingdotseq 1$ とする．このとき三角形 MND は $\angle\mathrm{D} = 90^\circ$ の直角三角形となる．

$$\begin{aligned} \mathrm{MD} : \mathrm{ND} : \mathrm{MN} &= 2t : |t^2 - 1| : \sqrt{(2t)^2 + (t^2-1)^2} \\ &= 2t : |t^2 - 1| : (t^2 + 1) \end{aligned}$$

である．ここで，2 円は外接しているため，中心間の距離は $\mathrm{MN}=R+r$ であり，また $\mathrm{ND}=|R-r|$ である．よって，

$$(R+r):|R-r|=(t^2+1):|t^2-1| \iff |R-r|(t^2+1)=(R+r)|t^2-1|$$

となるが，直線 MN の傾きを考えると，$t>1$ のとき傾きが正なので $R>r$ であり，$0<t<1$ のとき傾きが負なので $R<r$ であるから，$R-r$ と t^2-1 の正負は一致する．したがって

$$(R-r)(t^2+1)=(R+r)(t^2-1) \quad \text{より} \quad R=t^2r=t^2\cdot\frac{t^2+1}{2}=\frac{t^4+t^2}{2}$$

である．これが N の y 座標となる．また x 座標は

$$x=\mathrm{MD}=\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{MN}=\frac{2t}{t^2+1}(R+r)$$

であり，$R+r=\dfrac{t^4+t^2}{2}+\dfrac{t^2+1}{2}=\dfrac{(t^2+1)^2}{2}$ であるから，

$$x=\frac{(t^2+1)^2}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}=t(t^2+1)$$

となる．したがって N の座標は $\left(t(t^2+1),\ \dfrac{t^4+t^2}{2}\right)$ である．これは $t=1$ のときにも適する．また $t<0$ のときは，y 軸に関する対称性からやはり N の座標は同じものになる．つまり，$\mathrm{O_2}$ の中心 N の座標は $\boldsymbol{\left(t(t^2+1),\ \dfrac{t^4+t^2}{2}\right)}$ である．

(3) l は $R=r$ となるときの 2 円の中心を通る直線である．

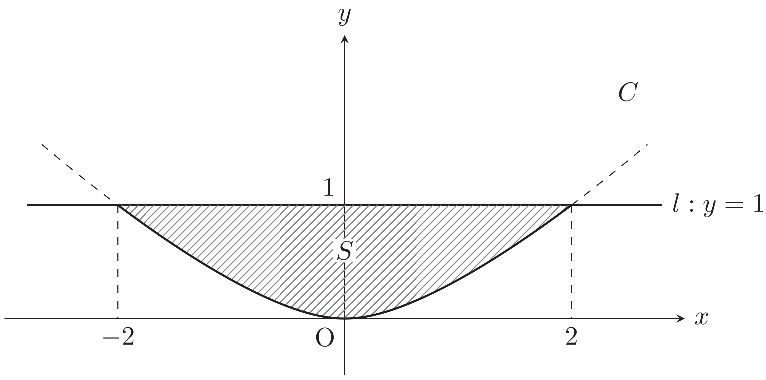
$$R=r \iff \frac{t^2+t^4}{2}=\frac{1+t^2}{2} \iff t^4=1 \iff t=\pm1$$

このとき，$R=r=1$ となる．つまり M, N の y 座標がいずれも 1 なので，直線 l の方程式は $\boldsymbol{y=1}$ である．

(4) C は $\mathrm{O_2}$ の中心 N の軌跡であるから，そのパラメータ表示は

$$x=t^3+t, \quad y=\frac{t^4+t^2}{2}$$

である．$t>0$ のとき $x,\ y$ はいずれも t に対して単調増加であり，また C のグラフは y 軸に関して対称であることから下図のようになる．



直線 $l:y=1$ と軌跡 C の交点は，(3) より $t=\pm1$ のときであり，対応する x 座標は $x=\pm2$（複号同順）である．求める面積を S とすると，S は直線 $y=1$ と曲線 C で囲まれた部分（$-2\leqq x\leqq 2$）であるから，

$$S=\int_{-2}^{2}(1-y)\,dx$$

である．ここで，$x = t^3 + t$ より $dx = (3t^2 + 1)\,dt$ であり，積分区間は $x : -2 \to 2$ のとき $t : -1 \to 1$ となる．
また t^2 が偶関数であり，t^2 の関数も偶関数となることに注意して

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{t^4 + t^2}{2}\right)(3t^2 + 1)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (-t^4 - t^2 + 2)(3t^2 + 1)\,dt \\
&= \int_{0}^{1} (-t^4 - t^2 + 2)(3t^2 + 1)\,dt \\
&= \int_{0}^{1} (-3t^6 - 4t^4 + 5t^2 + 2)\,dt \\
&= \left[-\frac{3}{7}t^7 - \frac{4}{5}t^5 + \frac{5}{3}t^3 + 2t\right]_0^1 \\
&= \boldsymbol{\frac{256}{105}}
\end{aligned}$$

予想配点

Ⅰ　40点　(1) $2+2+5$　(2) 10　(3) $5+2+2$　(4) 12

Ⅱ　40点　(1) 10　(2) 10　(3) 8　(4) 12

Ⅲ　30点　(1) 12　(2) 18

Ⅳ　40点　(1) 10　(2) 10　(3) 8　(4) 12

講評

Ⅰ［確率・期待値］（やや難～難）

3 行 3 列に並んだコインを一つずつ表に向けていって，初めてビンゴになる確率を計算させる問題．P_n を直接求めるのではなく，n 枚目までに終了する確率を元に計算することが思いつければやや数えやすかったかもしれないが，それでも難しい．それぞれ別個に求めて和が 1 になることを検算に使えるのが理想だが，P_4, P_6 が比較的求めやすいので，P_5 は引き算で求めてもよいだろう．

Ⅱ［数列］（標準）

群数列の問題である．m 群の末項が a_{m^2} であることが計算できれば，S_{m^2} を求めることができる．S_n が初めて 2026 以上になる n の値は $S_{m^2} < 2026$ となる最大の m を求めてから，それに何項足せばよいのかを探すことになる．この問題は典型的で，比較的考えやすかった．

Ⅲ［図形と方程式］（やや難）

u, v で表された点 A の座標 (x, y) を t, s による表示に変換し，t, s に関する条件から A の存在領域を図示する問題．変数変換の計算自体は容易なのだが，実質必要のない 2 乗記号のせいで目眩ましに会ったかもしれない．

Ⅳ［図形と方程式・数学Ⅲの積分］（難）

接する 2 円と放物線が絡んだ図形の問題．本問は (2) が難しいのだが，接する 2 円と共通接線の問題は頻出なので，扱いを覚えておきたい．慣れていないと，かなりの計算量が必要とされるだろう．しかし (3) は図形的には自明な解しかないことにも気づきたいところ．(4) の円の中心の軌跡が関係する領域の面積は，媒介変数による積分を必要とする．

本年度も大問 4 問の出題であった．やはり難問も出題されているが，手のつけられる問題も増えている．Ⅰ では手のつけられるところを手早く片付け，それ以上深追いしないことが大事だろう．Ⅱ は典型題なのでミスなく解き切りたい．Ⅲ も (1) は単純な計算だけである．(2) を乗り切れるかどうかで差がつくだろう．Ⅳ の (1) は合わせたい．(2) をどのように求めるかで悩んだ受験生は多いと思われる．この問題を乗り越えないと (4) の面積は解きようがない．目標は 55%.