# 解答速報

# 兵庫医科大学　数学

2026年 1月 28日実施

$\boxed{1}$ 次の (1) から (5) までの各問いに答えよ。なお，途中の式や考え方等も記入すること。

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $f(\theta) = |8\sin\theta - 2\cos 2\theta - 3|$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの $\theta$ の値を求めよ。

(2)　あるバクテリアの数が 3 時間で 10 倍の割合で増加している。このバクテリアが 100 倍の数になるには何時間かかるか，求めよ。

(3)　次の関数を微分せよ。ただし， $x > 0$ とする。

(a)　$y = x^x$

(b)　$y = x^{x^x}$

(4)　次の不定積分を求めよ。

$$\int \frac{x^2+4x+2}{x^2+3x+2}\,dx$$

(5)　2 つの変量 $x$ と $y$ について，50 個のデータが次のように与えられているとする。

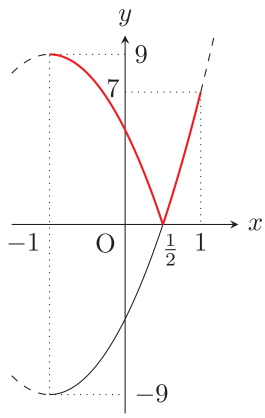
| No. | 1 | 2 | 3 | $\cdots\cdots$ | 49 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 変量 $x$ | 1 | 3 | 5 | $\cdots\cdots$ | 97 | 99 |
| 変量 $y$ | 99 | 97 | 95 | $\cdots\cdots$ | 3 | 1 |

(a)　変量 $x$ の平均値と分散をそれぞれ求めよ。

(b)　変量 $x$ と変量 $y$ の共分散を求めよ。

解答

(1)




$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= |8\sin\theta - 2\cos 2\theta - 3| \\
&= |8\sin\theta - 2(1 - 2\sin^2\theta) - 3| \\
&= |4\sin^2\theta + 8\sin\theta - 5| \\
&= |4(\sin\theta + 1)^2 - 9|
\end{aligned}
$$

$x = \sin\theta$ とおくと $-1 \leqq x \leqq 1$ であり，グラフより $-9 \leqq 4(x+1)^2 - 9 \leqq 7$ となるので

$$0 \leqq |4(x+1)^2 - 9| \leqq 9 \iff 0 \leqq f(\theta) \leqq 9$$

$f(\theta)$ が最大になるのは，$x = -1 \iff \theta = \dfrac{3}{2}\pi$ のときであり，最小になるのは $x = \dfrac{1}{2} \iff \theta = \dfrac{1}{6}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi$ のときである．

したがって，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{3}{2}\pi}$ **のとき最大値 9**，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{1}{6}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi}$ **のとき最小値 0** である．

(2) 最初のバクテリアの数を $x$ 個とすると，$3t$ 時間経過したバクテリアの数は $10^t x$ 個となる．よってこのバクテリアが $100x$ 個となるときの $t$ を求めると，

$$100x = 10^t x \iff t = 2$$

したがって，求める時間は **6 時間**である．

(3) (a) $x > 0$ より，$y = x^x$ の両辺の自然対数をとると，$\log y = x\log x$ であるから，両辺を $x$ で微分すると，

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \log x + x\cdot\frac{1}{x} \iff \frac{dy}{dx} = y(\log x + 1)$$

ゆえに，$\dfrac{dy}{dx} = \boldsymbol{x^x(\log x + 1)}$ である．

(b) $x > 0$ より，$y = x^{x^x}$ の両辺の自然対数をとると，$\log y = x^x \log x$ であるから，両辺を $x$ で微分すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x^x(\log x + 1)\cdot\log x + x^x\cdot\frac{1}{x} \\
\iff &\frac{dy}{dx} = yx^x\left\{(\log x + 1)\log x + \frac{1}{x}\right\} \\
\iff &\frac{dy}{dx} = x^{x^x + x}\left\{(\log x)^2 + \log x + \frac{1}{x}\right\}
\end{aligned}
$$

ゆえに，$\dfrac{dy}{dx} = \boldsymbol{x^{x^x + x}\left\{(\log x)^2 + \log x + \dfrac{1}{x}\right\}}$ である．

(4) 分子の次数下げをすると，

$$\frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 + 3x + 2} = 1 + \frac{x}{x^2 + 3x + 2}$$

となる．次に部分分数分解を考える．

$$\frac{x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

とおいて分母を払い整理すると，$x = (a+b)x + (2a+b)$ となる．係数比較をして，$a + b = 1$ かつ $2a + b = 0$ から $a = -1,\ b = 2$ が求まる．以上より，

$$\int \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 + 3x + 2}\,dx = \int \left(1 + \frac{x}{x^2 + 3x + 2}\right)dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}\right) dx$$
$$= \boldsymbol{x - \log|x+1| + 2\log|x+2| + C}$$

($C$ は積分定数)

(5) (a)　変量 $x$ の平均値を $\overline{x}$ とすると

$$\overline{x} = \frac{1}{50}\sum_{k=1}^{50}(2k-1) = \frac{1}{50} \times \frac{(1+99)\times 50}{2} = \mathbf{50}$$

である．（等差数列の平均値は中央値であるからこの結果は明らかである．）また $x$ の分散を ${s_x}^2$ とすると

$$\begin{aligned}
{s_x}^2 &= \frac{1}{50}\sum_{k=1}^{50}(2k-1-50)^2 \\
&= \frac{1}{50}\{(-49)^2 + (-47)^2 + \cdots + (-1)^2 + 1^2 + \cdots + 49^2\} \cdots ① \\
&= \frac{2}{50}\sum_{k=1}^{25}(2k-1)^2 \\
&= \frac{1}{25}\sum_{k=1}^{25}(4k^2 - 4k + 1) \\
&= \frac{1}{25}\left(4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 25 \cdot 26 \cdot 51 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 26 + 25\right) \\
&= \mathbf{833}
\end{aligned}$$

(b)　変量 $x$, $y$ の 50 個の値をそれぞれ $x_k$, $y_k$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 50)$ とおく．$y$ の平均値も明らかに 50 である．共分散を $s_{xy}$ とすると

$$\begin{aligned}
s_{xy} &= \frac{1}{50}\sum_{k=1}^{50}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) \\
&= \frac{1}{50}\{(-49)\cdot 49 + (-47)\cdot 47 + \cdots + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1) + \cdots + 49\cdot(-49)\} \\
&= ① \times (-1) \\
&= \mathbf{-833}
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。なお，途中の式や考え方等も記入すること。必要ならば，$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いなさい。

(1)　以下の $\boxed{ア}$ と $\boxed{イ}$ に適当な有理数を入れよ。

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{\boxed{ア}}-\sqrt{\boxed{イ}}}{2}$$

(2)　$a,\ b$ を正の整数，$i$ を虚数単位として，$\boxed{ウ}$ と $\boxed{エ}$ のそれぞれに $a$ と $b$ で表される式を入れよ。ただし，$\boxed{ウ}>0$，$\boxed{エ}>0$ とする。

$$\sqrt{a+\sqrt{b}i}=\sqrt{\boxed{ウ}}+\sqrt{\boxed{エ}}i$$

(3)　以下の $\boxed{オ}$ と $\boxed{カ}$ に適当な有理数を入れよ。

$$\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}=\boxed{オ}+\boxed{カ}\sqrt{3}$$

(4)　$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{BC}=2$ である長方形 ABCD において，辺 BC 上の点 P に対して，$\angle\mathrm{DPC}=75^\circ$ であるとき，

(a)　$\sin 75^\circ$ の値を求めよ。

(b)　$\angle\mathrm{PAB}$ の大きさを求めよ。

解答

(1)　$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$.

(2)　$\sqrt{a+\sqrt{b}i}=\sqrt{c}+\sqrt{d}i$ とおく．ただし，与条件から $c,\ d$ は正の実数である．両辺を 2 乗して

$$a+\sqrt{b}i=c-d+2\sqrt{cd}i$$

となる．複素数の相等から

$$\begin{cases} a=c-d \\ \sqrt{b}=2\sqrt{cd} \end{cases} \iff \begin{cases} c+(-d)=a \\ c(-d)=\dfrac{-b}{4} \end{cases}$$

解と係数の関係から，$c,\ -d$ は 2 次方程式 $t^2-at-\dfrac{b}{4}=0$ の 2 解である．これを解くと $t=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+b}}{2}$ であり，$c>0,\ -d<0$ であるから，

$$c=\frac{a+\sqrt{a^2+b}}{2},\ -d=\frac{a-\sqrt{a^2+b}}{2}\quad \text{より}\quad c=\frac{a+\sqrt{a^2+b}}{2},\ d=\frac{-a+\sqrt{a^2+b}}{2}$$

すなわち

$$\sqrt{a+\sqrt{b}i}=\sqrt{\boldsymbol{\frac{a+\sqrt{a^2+b}}{2}}}+\sqrt{\boldsymbol{\frac{-a+\sqrt{a^2+b}}{2}}}i$$

である．

(3)　$\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}=x,\ \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}=y$ とおくと，

$$xy=\sqrt[3]{(6\sqrt{3}-10)(6\sqrt{3}+10)}=\sqrt[3]{8}=2$$

$$x^3-y^3=(6\sqrt{3}-10)-(6\sqrt{3}+10)=-20$$

となる．また

$$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$$

が成り立つから，$x-y=t$ とおくと

$$\begin{aligned} &-20=t^3+3\cdot 2\cdot t \\ \iff\ & t^3+6t+20=0 \\ \iff\ & (t+2)(t^2-2t+10)=0 \end{aligned}$$

となる．$t=x-y$ は実数なので $t^2-2t+10=0$ は成り立たない．よって $t=x-y=-2$ となる．以上から，

$$x+(-y)=-2,\ x(-y)=-2$$

が得られるので，$x,\ -y$ は 2 次方程式 $u^2+2u-2=0$ の 2 解である．これを解くと $u=-1\pm\sqrt{3}$ であり，$x<y$ より，$x=\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}=\mathbf{-1}+\mathbf{1}\cdot\sqrt{3}$ である．

別解

$\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}=x+y\sqrt{3}$ とし，両辺を 3 乗すると

$$\begin{aligned} 6\sqrt{3}-10&=x^3+3\sqrt{3}x^2y+9xy^2+3\sqrt{3}y^3 \\ &=3\sqrt{3}(x^2y+y^3)+(x^3+9xy^2) \end{aligned}$$

$\sqrt{3}$ が無理数であることから，両辺を比較することにより，

$$\begin{cases} x^2y+y^3=2\cdots① \\ x^3+9xy^2=-10\cdots② \end{cases}$$

$①\times 5+②$ より

$$x^3+5x^2y+9xy^2+5y^3=0$$

を得る．さらに $y\fallingdotseq 0$ であることから，両辺を $y^3$ で割ると

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3+5\left(\frac{x}{y}\right)^2+9\left(\frac{x}{y}\right)+5=0$$

ここで $\dfrac{x}{y}=t$ とおき，$t$ の 3 次方程式として解くと

$$t^3+5t^2+9t+5=0 \iff (t+1)(t^2+4t+5)=0$$

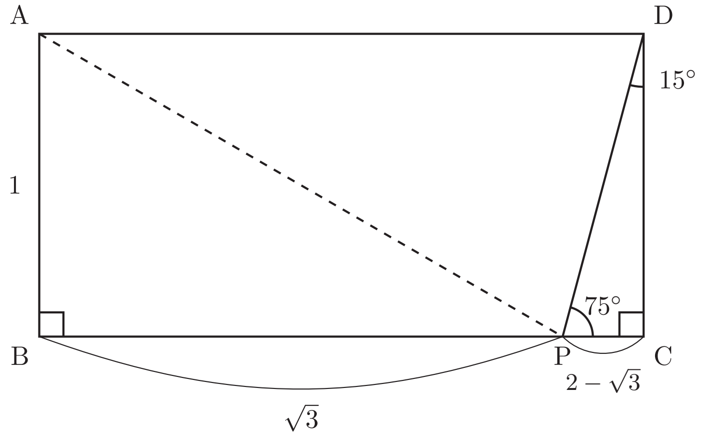
$t$ は実数より，$t=-1$ となる．これより $y=-x$ であるので，① に代入して $-2x^3=2 \iff x=-1$．
よって $y=1$ となるので，$\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}=\mathbf{-1}+\mathbf{1}\cdot\sqrt{3}$ である．

(4) (a)　加法定理を利用すると，

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ&=\sin(45^\circ+30^\circ) \\ &=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ \\ &=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \end{aligned}$$

である．

(b)　まず，$\angle\mathrm{DCP}=90^\circ$，$\angle\mathrm{PDC}=15^\circ$ より，$\mathrm{PC}=\tan 15^\circ$ である．加法定理を利用すると，$\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$ と求まるので $\mathrm{PC}=2-\sqrt{3}$ と分かり，$\mathrm{BP}=2-\mathrm{PC}=\sqrt{3}$ も求まる．以上より，$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BP}=\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{ABP}=90^\circ$ であるから $\angle\mathrm{PAB}=\mathbf{60^\circ}$ となる．




別解

辺 BC 上に，$AQ = 2$ となるように Q をとる．このとき，三角形 ABQ で考えると $\angle BAQ = 60^\circ$ がわかり，ゆえに $\angle QAD = 30^\circ$ もわかる．また，$AD = AQ = 2$ であるから三角形 ADQ は二等辺三角形であり，$\angle AQD = \angle ADQ = 75^\circ$ とわかる．よって

$$\angle DQC = 180^\circ - \angle AQB - \angle AQD = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ$$

つまり，点 Q は点 P と一致する．ゆえに $\angle PAB = \angle QAB = \mathbf{60^\circ}$ である．

$\boxed{3}$ $\theta$ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。$xy$ 平面内に点 $\mathrm{A}(0,\ \sin\theta)$, $\mathrm{B_1}(0,\ -1)$, $\mathrm{B_2}(0,\ 1)$ をとるとき，以下の問いに答えよ。なお，途中の式や考え方等も記入すること。

(1) 点 $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$ からの距離の差 $|\mathrm{B_1P}-\mathrm{B_2P}|$ が一定である点 P の軌跡として得られる曲線のうちで点 A を通るものは，$x$ 軸上の上側にあることを示し，その曲線 $C$ の方程式と漸近線を求めよ。

(2) 曲線 $C$ 上を運動する点 P の時刻 $t$ における $x$ 座標が $\dfrac{\cos\theta}{2}(e^t-e^{-t})$ と表されるとき，時刻 $t$ における点 P の $y$ 座標を $t$ の関数として表せ。また，時刻 $t$ における点 P の速度ベクトルを求めよ。

(3) 曲線 $C$ 上の点 $\mathrm{P_0}(x_0,\ y_0)$ における接線が 2 つの漸近線と交わる点を Q, R とする。原点 O と点 Q, R で作られる $\triangle\mathrm{OQR}$ の面積は点 $\mathrm{P_0}$ の位置によらず一定であることを示せ。

解答

(1)

$$|\mathrm{B_1A}-\mathrm{B_2A}|=|(\sin\theta+1)-(1-\sin\theta)|=2|\sin\theta|=2\sin\theta\ (\because\ \sin\theta>0)$$

であるから $|\mathrm{B_1P}-\mathrm{B_2P}|$ の一定値は $2\sin\theta$ である．$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$\begin{aligned}&|\mathrm{B_1P}-\mathrm{B_2P}|=2\sin\theta\\ \iff&\sqrt{x^2+(y+1)^2}-\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\pm2\sin\theta\\ \iff&\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\pm2\sin\theta\end{aligned}$$

右辺が 0 以上の条件のもとで両辺を 2 乗すると，

$$\begin{aligned}&x^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2\pm4\sin\theta\sqrt{x^2+(y-1)^2}+4\sin^2\theta\\ \iff&4y-4\sin^2\theta=\pm4\sin\theta\sqrt{x^2+(y-1)^2}\\ \iff&y-\sin^2\theta=\pm\sin\theta\sqrt{x^2+(y-1)^2}\end{aligned}$$

さらに両辺を 2 乗すると，

$$\begin{aligned}&y^2-(2\sin^2\theta)y+\sin^4\theta=\sin^2\theta\{x^2+(y-1)^2\}\\ \iff&(\sin^2\theta)x^2+(\sin^2\theta-1)y^2=\sin^4\theta-\sin^2\theta\\ \iff&(\sin^2\theta)x^2-(\cos^2\theta)y^2=-\sin^2\theta\cos^2\theta\\ \iff&\frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=-1\\ \iff&y=\pm\sqrt{\left(\frac{x^2}{\cos^2\theta}+1\right)\sin^2\theta}\end{aligned}$$

となるが，このうち点 $\mathrm{A}(0,\ \sin\theta)$ を通るものは $y=\sqrt{\left(\dfrac{x^2}{\cos^2\theta}+1\right)\sin^2\theta}\ (>0)$ の方である． したがって，この曲線は $x$ 軸の上側にあり，その曲線 $C$ の方程式は $C$： $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=-1\ (y>0)}\cdots$①（双曲線の上半分）である．また，漸近線の方程式は $\boldsymbol{y=\pm(\tan\theta)x}$ である．

注釈

上の解答では，与えられた距離の条件から計算によって軌跡を導いているが，双曲線の定義から考えることもできる．$|\mathrm{B_1P}-\mathrm{B_2P}|$ が一定である点 P の軌跡は，$\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$ を焦点とする双曲線となる．$\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$ はいずれも $y$ 軸上にあり，その中点が原点であることから，P の軌跡の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$ とお

け，点 A$(0,\ \sin\theta)$ を通り $\sin\theta>0$ であることから $b=\sin\theta$ である．また，焦点間距離が $\mathrm{B_1B_2}=2$ なので，$\sqrt{a^2+b^2}=1$ から $a=\cos\theta$ もわかる．つまりこの P の軌跡は $\dfrac{x^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=-1$ である．（以下略）

(2)　①に $x=\dfrac{\cos\theta}{2}(e^t-e^{-t})$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos^2\theta}{4\cos^2\theta}(e^t-e^{-t})^2-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=-1\\
\iff&\frac{(e^t-e^{-t})^2}{4}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=-1\\
\iff&\frac{y^2}{\sin^2\theta}=\frac{(e^t-e^{-t})^2}{4}+1=\frac{(e^t+e^{-t})^2}{4}
\end{aligned}$$

であるから，$y>0$ を考慮して $y$ 座標は $\boldsymbol{\dfrac{\sin\theta}{2}(e^t+e^{-t})}$ である．また，

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=\frac{\cos\theta}{2}(e^t+e^{-t})\\
\frac{dy}{dt}&=\frac{\sin\theta}{2}(e^t-e^{-t})
\end{aligned}$$

であるから，点 P における速度ベクトルは $\boldsymbol{\left(\dfrac{\cos\theta}{2}(e^t+e^{-t}),\ \dfrac{\sin\theta}{2}(e^t-e^{-t})\right)}$ である．

(3)　点 $(x_0,\ y_0)=\left(\dfrac{\cos\theta}{2}(e^t-e^{-t}),\ \dfrac{\sin\theta}{2}(e^t+e^{-t})\right)$ における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\sin\theta}{2}(e^t-e^{-t})}{\frac{\cos\theta}{2}(e^t+e^{-t})}=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\tan\theta$$

であるから，点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned}
y&=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}(\tan\theta)\left\{x-\frac{\cos\theta}{2}(e^t-e^{-t})\right\}+\frac{\sin\theta}{2}(e^t+e^{-t})\\
&=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}(\tan\theta)x-\frac{\sin\theta}{2}\cdot\frac{(e^t-e^{-t})^2}{e^t+e^{-t}}+\frac{\sin\theta}{2}(e^t+e^{-t})\\
&=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}(\tan\theta)x+\frac{2\sin\theta}{e^t+e^{-t}}\cdots②
\end{aligned}$$

これと漸近線 $y=(\tan\theta)x$ との交点を Q とする．② と連立すると

$$\begin{aligned}
&(\tan\theta)x=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}(\tan\theta)x+\frac{2\sin\theta}{e^t+e^{-t}}\\
\iff&x=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}x+\frac{2\cos\theta}{e^t+e^{-t}}\\
\iff&x=e^t\cos\theta
\end{aligned}$$

であるから，

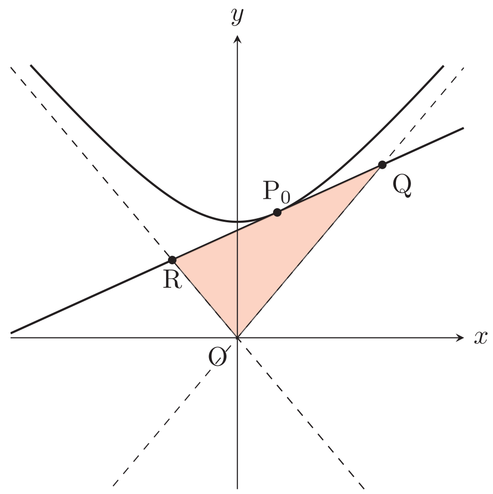
$$\mathrm{Q}(e^t\cos\theta,\ e^t\sin\theta)$$

がわかる．また，② と漸近線 $y=-(\tan\theta)x$ との交点を R とすると，同様の計算で

$$\mathrm{R}(-e^{-t}\cos\theta,\ e^{-t}\sin\theta)$$

となることもわかる．したがって，△OQR の面積は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left|e^t\cos\theta\cdot e^{-t}\sin\theta-(-e^{-t}\cos\theta)\cdot e^t\sin\theta\right|\\=&\ \frac{1}{2}\left|2\sin\theta\cos\theta\right|\\=&\ \sin\theta\cos\theta\quad(\because\ \sin\theta\cos\theta>0)\end{aligned}$$




となるので点 $\mathrm{P}_0$ の位置によらず一定である．　(証明終)

注釈

一般に双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$ $(a>0,\ b>0)$ 上の点における接線と 2 つの漸近線の交点，および原点で作られる三角形の面積は $ab$ である．

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ $(a>0,\ b>0)$ の場合の証明を以下に記す．

【証明】

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 上の点 $(s,\ t)$ における接線の方程式は

$$\frac{sx}{a^2}-\frac{ty}{b^2}=-1$$

である．これと漸近線 $y=\dfrac{b}{a}x,\ y=-\dfrac{b}{a}x$ との交点をそれぞれ Q, R とすると，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{-a}{\frac{s}{a}-\frac{t}{b}},\ \frac{-b}{\frac{s}{a}-\frac{t}{b}}\right),\ \mathrm{R}\left(\frac{-a}{\frac{s}{a}+\frac{t}{b}},\ \frac{b}{\frac{s}{a}+\frac{t}{b}}\right)$$

となるので，三角形 △OQR の面積は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left|\frac{-a}{\frac{s}{a}-\frac{t}{b}}\cdot\frac{b}{\frac{s}{a}+\frac{t}{b}}-\frac{-b}{\frac{s}{a}-\frac{t}{b}}\cdot\frac{-a}{\frac{s}{a}+\frac{t}{b}}\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\frac{-ab}{\frac{s^2}{a^2}-\frac{t^2}{b^2}}-\frac{ab}{\frac{s^2}{a^2}-\frac{t^2}{b^2}}\right|\\&=\frac{1}{2}\left|2ab\right|\quad\left(\because\ \frac{s^2}{a^2}-\frac{t^2}{b^2}=-1\right)\\&=ab\end{aligned}$$

である．　(証明終)

予想配点

$\boxed{1}$ (1) 12　(2) 6　(3) $6+6$　(4) 8　(5) $6+6$

$\boxed{2}$ (1) 5　(2) 15　(3) 15　(4) $5+10$

$\boxed{3}$ (1) 20　(2) 15　(3) 15

講評

$\boxed{1}$ ［小問集合］（(1) 易 (2) 易 (3) 標準 (4) やや易 (5) 標準）

(1)　$x = \sin\theta$ の 2 次式として表してから処理すればよい．

(2)　パズル的要素のある問題である．引っかかって「30 時間」と答えてはいけない．

(3)　対数微分により計算を進めればよい．

(4)　定石に従い，分子の次数を下げたのち部分分数分解を行って積分する．

(5)　等差数列の平均は中央値に一致する．分散は定義に基づき式を整え，総和を計算すればよい．また，$x$, $y$ の共分散が $x$ の分散の $-1$ 倍であることを用いれば，追加の計算を要しない．

(1)，(4) は典型的な問題であり，確実に得点したい．(5) は共分散に馴染みがない場合，取り組みにくく感じられるかもしれない．

$\boxed{2}$ ［二重根号，三角比］（(1) 易 (2) 標準 (3) やや難 (4) 易）

(1)(2)(3) は二重根号を外す問題であるが，設問ごとに方針が異なる．

(1) は基本的な処理で解ける．(2) は右辺を $\sqrt{c} + \sqrt{d}i$ とおいて 2 乗し，実部・虚部を比較する．(3) は結果の見通しは立てやすいが，考え方を記述するのが難しい．問題文に「有理数」とあることに着目し，共役な 2 次無理数を用いると要領よく解ける．

(4)(a) は加法定理の適用であるが，(b) は中学入試を想起させる図形問題である．図形的に考えてもよく，三角関数を用いて処理してもよい．

$\boxed{3}$ ［双曲線，数学Ⅲの微分］（やや難～難）

(1) は双曲線の方程式とその漸近線を求める問題である．公式を暗記していなくても，計算により導くことができる．

(2) は双曲線上の点を標準的にパラメータ表示し，速度ベクトルを求める問題である．計算自体は定型的であるが，(1) でつまずくと以後は解けなくなる．

(3) は (2) を用いなくても，接線と漸近線の交点として Q, R の座標を求め，面積公式により処理してよい．なお，双曲線とその接線，漸近線については，△OQR の面積が一定となるという事実がある．

各大問とも最後の方が解きにくいが，他は典型的な出題であり，なるべくミスなく処理したい．目標は 55%.