藤田医科大学（ふじた未来入試）　数学

2025年 11月 9日実施

問題 1

(1)　関数 $y = \sin 2x - 8\cos x + 8\sin x + 8\sqrt{2}$ の最小値は $\boxed{アイ}$ である。

(2)　関数 $y = \dfrac{x+3}{x^2+x+30}$ の最大値は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

(3)　$\left(\log_{\frac{1}{9}} 6561\right)\left(\log_{4096} \dfrac{1}{16}\right) = \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である。

(4)　3 個のサイコロを振って出た目の数の積が 30 で割り切れる確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$ である。

(5)　座標平面上で $-2 \leqq x \leqq 4$，$(y-x^2)(y+x^2-2x-4) \leqq 0$ を満たす領域の面積は $\boxed{コサ}$ である。

(6)　正の整数 x, y が $(3x+y-8)(x+2y-7) = 15$ を満たすとき，$x = \boxed{シ}$，$y = \boxed{ス}$ である。

(7)　$x = 5+\sqrt{3}i$ のとき，$x^5 - 9x^4 + 21x^3 + 64x + 70 = \boxed{セソ}$ である。ただし i は虚数単位とする。

(8)　10 進法の数 2026 を 8 進法で表すと $\boxed{タチツテ}_{(8)}$ となる。

(9)　四面体 ABCD において，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA} = a$，$\mathrm{AD} = 2$，$\mathrm{AD} \perp \mathrm{AB}$，$\mathrm{AD} \perp \mathrm{AC}$ とする。四面体 ABCD の全ての頂点を通る球の半径が 7 のとき，$a = \boxed{トナ}$ である。

(10)　$a_1 = \dfrac{1}{2026}$，$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ がある。このとき，$a_{2026} = \dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌネノハ}}$ である。

解答

解答記号	正解
アイ	-1
$\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\dfrac{1}{7}$
$\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\dfrac{4}{3}$
$\dfrac{\text{キ}}{\text{クケ}}$	$\dfrac{7}{36}$
コサ	30

解答記号	正解
シ，ス	2，5
セソ	14
タチツテ	3752
トナ	12
$\dfrac{\text{ニ}}{\text{ヌネノハ}}$	$\dfrac{1}{4051}$

解説

(1)　$\sin x - \cos x = t$ とおくと，

$$t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x \iff 2\sin x\cos x = 1 - t^2$$

よって

$$\begin{aligned} y &= \sin 2x - 8\cos x + 8\sin x + 8\sqrt{2} \\ &= 2\sin x\cos x + 8(\sin x - \cos x) + 8\sqrt{2} \\ &= (1 - t^2) + 8t + 8\sqrt{2} = -(t-4)^2 + 8\sqrt{2} + 17 \end{aligned}$$

ここで $t = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ であるので，$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ である．

したがって，y は $t = -\sqrt{2}$ のとき最小となり，その値は

$$1 - (-\sqrt{2})^2 - 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = \mathbf{-1}$$

(2)　$x^2 + x + 30 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{119}{4} > 0$ より，y が最大となるのは分子が正となる $x > -3$ のときである．以下，$x > -3$ として考える．

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} &= \frac{x^2 + x + 30}{x + 3} = \frac{(x+3)(x-2) + 36}{x+3} \\ &= x - 2 + \frac{36}{x+3} = x + 3 + \frac{36}{x+3} - 5 \end{aligned}$$

$x + 3 > 0$，$\dfrac{36}{x+3} > 0$ なので，相加平均と相乗平均の関係より

$$x + 3 + \frac{36}{x+3} \geqq 2\sqrt{(x+3)\cdot\frac{36}{x+3}} = 12$$

等号は $x + 3 = \dfrac{36}{x+3}$，すなわち $x = 3$ のとき成り立つ．

このとき $\dfrac{1}{y} \geqq 12 - 5 = 7$ となるので，$y \leqq \dfrac{1}{7}$．したがって，y の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{7}}$ である．

別解

もちろん増減表をかいて考えてもよい．

$$y' = \frac{(x^2 + x + 30) - (2x+1)(x+3)}{(x^2 + x + 30)^2} = -\frac{(x+9)(x-3)}{(x^2+x+30)^2}$$

よって増減表は以下のようになるので，最大値は $\mathbf{\dfrac{1}{7}}$.

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-9	$\cdots$	3	$\cdots$	(∞)
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	(0)	$\searrow$	$-\dfrac{1}{17}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{7}$	$\searrow$	(0)

(3)

$$\left(\log_{\frac{1}{9}} 6561\right)\left(\log_{4096}\frac{1}{16}\right) = \frac{\log_3 3^8}{\log_3 \frac{1}{9}} \cdot \frac{\log_2 \frac{1}{16}}{\log_2 2^{12}}$$

$$= \frac{8}{-2}\cdot\frac{-4}{12} = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

(4)　3 個のサイコロを振るときの目の出方は $6^3 = 216$ 通りあり，これらは同様に確からしい.

5 がちょうど 2 回出るのは $(5,5,6)$ の並べ方を考えて 3 通り.

5 がちょうど 1 回出るのは $(5,1,6)$, $(5,2,3)$, $(5,2,6)$, $(5,3,4)$, $(5,3,6)$, $(5,4,6)$ のそれぞれについて並べ方を考えて 6 通りずつであり，$(5,6,6)$ が 3 通りなので $6\times 6+3=39$ 通り.

よって，計 42 通り.

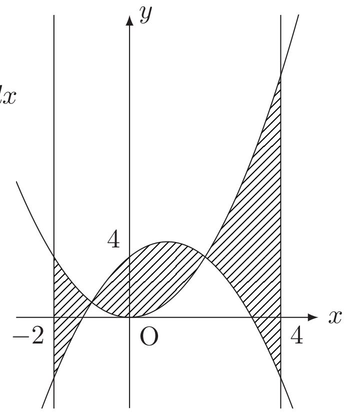
したがって求める確率は $\dfrac{42}{216} = \mathbf{\dfrac{7}{36}}$.

(5)　$x^2 - (-x^2+2x+4) = 2(x-2)(x+1)$ なので題意の領域は図のようになり，求める面積を S とすると，

$$S = \int_{-2}^{-1}(2x^2-2x-4)dx + \int_{-1}^{2}\{-(2x^2-2x-4)\}dx + \int_{2}^{4}(2x^2-2x-4)dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x\right]_{2}^{-1} + \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x\right]_{2}^{4}$$

$$= \mathbf{30}.$$



(6)　x, y が正の整数であることから，$3x+y-8 \geqq -4$, $x+2y-7 \geqq -4$ なので,

$(3x+y-8,\ x+2y-7) = (1,\ 15), (3,\ 5), (5,\ 3), (15,\ 1)$ のいずれかである．これを解くと

$$(x, y) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{57}{5}\right), (2, 5), \left(\frac{16}{5}, \frac{17}{5}\right), \left(\frac{38}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

となるので，$x = \mathbf{2}, y = \mathbf{5}$.

(7)　$x = 5+\sqrt{3}i \iff x-5 = \sqrt{3}i$ の両辺を 2 乗して整理すると，

$$(x-5)^2 = \left(\sqrt{3}i\right)^2 \iff x^2 - 10x + 28 = 0$$

となる．$f(x) = x^5 - 9x^4 + 21x^3 + 64x + 70$ とおき 2 次式 $x^2-10x+28$ で割ると，

$$f(x) = \left(x^2-10x+28\right)\left(x^3+x^2+3x+2\right) + 14$$

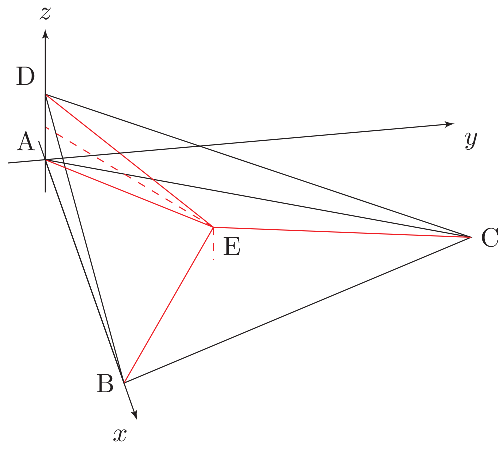
である．これより，$f\left(5+\sqrt{3}i\right) = \mathbf{14}$.

(8)　$2026 = 3\cdot 8^3 + 7\cdot 8^2 + 5\cdot 8^1 + 2\cdot 8^0$ より $\mathbf{3752}_{(8)}$ である.

実際の計算は次のような筆算をする.

8	2026		
8	253	$\cdots$	2
8	31	$\cdots$	5
	3	$\cdots$	7

(9)　△ABC は正三角形であり，$\mathrm{AD} \perp \mathrm{AB}$，$\mathrm{AD} \perp \mathrm{AC}$ であることから次のように座標化して考える．



$$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(a,\ 0,\ 0),\ \mathrm{C}\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ 0\right),\ \mathrm{D}(0,\ 0,\ 2)$$

この 4 つの頂点を通る球の中心を $\mathrm{E}(x,\ y,\ z)$ とすると，

- $\mathrm{AE} = 7$ より $x^2 + y^2 + z^2 = 49 \cdots$①
- $\mathrm{BE} = 7$ より $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = 49 \cdots$②
- $\mathrm{CE} = 7$ より $\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + z^2 = 49 \cdots$③
- $\mathrm{DE} = 7$ より $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 49 \cdots$④

を得る．ここで，①，④より $z = 1$，①，②より $x = \frac{1}{2}a$ がわかるので，①，③に代入することにより $y^2 = 48 - \frac{1}{4}a^2 \cdots$⑤，$\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = 48 \cdots$⑥ を得る．⑤，⑥から $y = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ となるので，これを⑥に代入することにより，$\frac{1}{3}a^2 = 48 \iff a^2 = 144$ を得る．$a > 0$ であることから $a = \mathbf{12}$ となる．

別解

座標を使わずに以下のように考えることもできる．線分 AD の中点を M とし，球の中心 E から平面 ABC に下ろした垂線の足を G とする．G は正三角形 ABC の重心であるから，

$$\mathrm{AG} = a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

である．また，$\angle\mathrm{AME} = \frac{\pi}{2}$ であることから，三平方の定理により

$$\mathrm{EM} = \sqrt{\mathrm{AE}^2 - \mathrm{AM}^2} = \sqrt{7^2 - 1^2} = 4\sqrt{3}$$

である．$\mathrm{EM} = \mathrm{AG}$ であることから，

$$\frac{a}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \iff a = \mathbf{12}$$

(10)　帰納的に $a_n > 0$ である．$b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと，

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n} \iff \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1 + a_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + 1$$

$$\Longleftrightarrow \ b_{n+1} = b_n + 1$$

となる．これより数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 2026$，公差 1 の等差数列なので

$$b_n = b_1 + (n-1) = 2025 + n$$

よって，$a_{2026} = \dfrac{1}{b_{2026}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4051}}$.

的中!!

2025 年 8 月実施 藤田医科大学模試

3 個のさいころを同時に投げたとき，出た目の積が 24 になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

藤田医科大学模試で，3 個のサイコロの目の積に関する問題が的中！

問題2

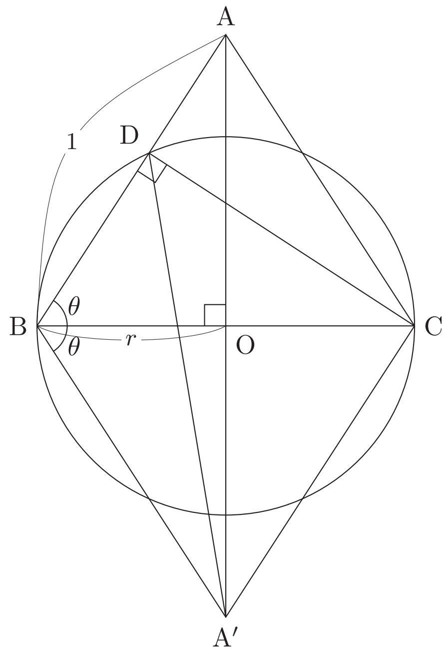
$AB = AC = 1$，$BC = 2r$ $\left(0 < r < \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ となる二等辺三角形 ABC がある。辺 BC の中点を中心とした半径 r の円を円 O とする。円 O と辺 AB の交点のうち点 B でない交点を D とし，辺 BC に関して点 A と対称となる点を A$'$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AD の長さを r を用いて表せ。

(2) 線分 A$'$D の長さを r を用いて表せ。

解答

円 O の中心を O とし，$\angle \mathrm{OBA} = \theta$ とする．与えられた r の範囲から，点 A は円 O の外側にある．



(1) $AB = AC$ より，$AO \perp BO$ であるから，

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}} = r$$

である．また，線分 BC は円 O の直径であるから $BD \perp CD$ なので，

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BC}\cos\theta = 2r\cdot r = 2r^2$$

である．したがって，

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AB} - \mathrm{BD} = \boldsymbol{1 - 2r^2}$$

別解

方べきの定理を用いても求められる．

まず三平方の定理から $\mathrm{AO}^2 = 1 - r^2$ である．

A から円 O に引いた接線の接点を E とすると，

$$\mathrm{AE}^2 = \mathrm{AO}^2 - \mathrm{OE}^2 = 1 - 2r^2$$

であるから，方べきの定理により

$$\mathrm{AE}^2 = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD} \iff \mathrm{AD} = \boldsymbol{1 - 2r^2}$$

(2) A と A$'$ の対称性から，$\angle \mathrm{A'BD} = 2\theta$ である．また，$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2r^2 - 1$ なので，$\triangle \mathrm{A'BD}$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{A'D}^2 &= \mathrm{A'B}^2 + \mathrm{BD}^2 - 2\cdot\mathrm{A'B}\cdot\mathrm{BD}\cos 2\theta \\ &= 1^2 + (2r^2)^2 - 2\cdot 1\cdot 2r^2(2r^2 - 1) \\ &= 1 + 4r^2 - 4r^4\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\mathrm{A'D} = \boldsymbol{\sqrt{1 + 4r^2 - 4r^4}}$$

問題 3

n, x, y, z を負でない整数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$x+2y=2n$ を満たす $(x,\ y)$ の組の個数を n で表せ。

(2)　$x+2y \leqq 2n$ を満たす $(x,\ y)$ の組の個数を n で表せ。

(3)　$x+y+z=n$ を満たす $(x,\ y,\ z)$ の組の個数を n で表せ。

(4)　$x+y+z \leqq n$ を満たす $(x,\ y,\ z)$ の組の個数を n で表せ。

解答

(1)　$(x,\ y)=(0,\ n),\ (2,\ n-1),\ (4,\ n-2),\ \cdots,\ (2n-2,\ 1),\ (2n,\ 0)$ の $\boldsymbol{n+1}$ **個** である．

(2)　$y=k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ と固定すると，$0 \leqq x \leqq 2n-2k$ となるので，これを満たす非負整数 x は $2n-2k+1$ 個である．よって，求める個数は，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(2n-2k+1) &= (2n+1)+(2n-1)+\cdots+5+3+1 \\ &= \frac{(2n+2)(n+1)}{2} \\ &= \boldsymbol{(n+1)^2}\end{aligned}$$

である．

別解

座標平面上に 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2n, 0)$, $\mathrm{B}(2n,\ n)$, $\mathrm{C}(0,\ n)$ を取る．求める個数は，三角形 OAC の内部と周上にある格子点の個数に一致する．長方形 OABC の内部と周上にある格子点の個数は $(2n+1)(n+1)$ 個であり，対角線である線分 AC 上にある格子点は y 座標に注目して $n+1$ 個であるから，求める個数は

$$\frac{(2n+1)(n+1)-(n+1)}{2}+(n+1)=\boldsymbol{(n+1)^2}$$

(3)　「n 個の○と 2 つの仕切りを一列に並べる並べ方」と同じである（重複組合せ ${}_3\mathrm{H}_n$ のことである）．よって，求める個数は

$${}_{n+2}\mathrm{C}_2=\frac{(n+2)!}{n!2!}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(n+2)(n+1)}$$

となる．（なお，${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ である）

(4)　負でない整数 w を用いて，

$$x+y+z+w=n$$

を満たす $(x,\ y,\ z,\ w)$ の組の個数を数えるのと同値である．すなわち，「n 個の○と 3 つの仕切りを一列に並べる並べ方」と同じである（重複組合せ ${}_4\mathrm{H}_n$ のことである）．よって，求める個数は

$${}_{n+3}\mathrm{C}_3=\frac{(n+3)!}{n!3!}=\boldsymbol{\frac{1}{6}(n+3)(n+2)(n+1)}$$

となる．

大的中

2025 年 10 月実施 藤田医科大学ふじた未来入試対策テキスト

$x+y+z \leqq 16,\ x>0,\ y>0,\ z>0$ を満たす整数は何組あるか．

ふじた未来入試対策で，文字 w を用いて不等式を等式に変形して数える問題が大的中！

講評

問題 1［小問集合］((1) やや易 (2) やや易 (3) 易 (4) 標準 (5) 標準 (6) やや易 (7) 標準 (8) 易 (9) やや難 (10) やや易)

昨年度と比べると，易しい問題が減り，標準レベルの問題が増えた．全体的に経験を要する問題が多く，点差がついたのではないだろうか．(2) は数学 III の微分を用いると簡単であるが，試験範囲に則って解こうとするとかえって難しかったかもしれない．ここで 7 題を確保できるかが勝負の分かれ目になると思われる．

問題 2［図形と計量，平面図形］(標準)

二等辺三角形と円に関して，余弦定理，あるいは方べきの定理などを用いて線分長を求める問題であった．方針さえ立てられれば完答が望まれるが，差はつきやすいかもしれない．

問題 3［場合の数，数列］(標準)

(1) は数え上げる．(2) も数え上げていけば解法の糸口はつかめるだろう．(3) は重複組合せの典型的な問題である．(4) において，非負整数 w を用いて不等式を等式に直すというのは有名なテクニックなので，ぜひ知っておきたい．

昨年に比べると，問題 1 の小問集合の難易度は上がり，一方で記述の問題 2，3 の難易度が下がっている．本学の特徴であった証明問題が出題されていないことは注目すべき点だろう．問題 2 と 3 の少なくとも一方を満点に近いところまで仕上げ，問題 1 で 7 題程度を正解したい．目標点は 70%.

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ