

大阪医科薬科大学(後期) 数学

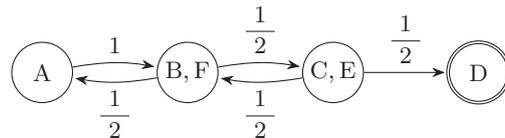
2026年 3月 10日実施

[1] 正六角形 ABCDEF があり、動点 P がこの六角形の頂点を移動する。動点 P は初め頂点 A にあり、1 分毎に辺で結ばれた隣の頂点のいずれかにそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で移動する。頂点 D をゴール(終点)とし、動点 P がゴールに到着したら移動は終わりとする。

n を 0 以上の整数として、動点 P が n 分後に頂点 A にある確率を a_n 、頂点 C または E にある確率を b_n 、ゴールに到着する確率を p_n とおく。このとき、次の問いに答えよ。ただし、(1) は結果のみを解答せよ。

- (1) p_3, p_4 の値を求めよ。
- (2) n が自然数のとき $a_n = b_n$ が成り立つことを証明せよ。
- (3) m を自然数とする。 p_{2m+1} を m を用いて表せ。

解答



動点 P が n 分後に頂点 B または F にある確率を c_n とする。 $a_0 = 1, c_0 = 0, b_0 = 0, p_0 = 0$ である。 n を 0 以上の整数として次の漸化式が成り立つ。

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}c_n \cdots \textcircled{1}, \quad c_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n \cdots \textcircled{2},$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}c_n \cdots \textcircled{3}, \quad p_{n+1} = \frac{1}{2}b_n \cdots \textcircled{4}$$

この漸化式より次がわかる。

$$a_1 = 0, c_1 = 1, b_1 = 0, p_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{2}, c_2 = 0, b_2 = \frac{1}{2}, p_2 = 0$$

$$a_3 = 0, c_3 = \frac{3}{4}, b_3 = 0, p_3 = \frac{1}{4}$$

$$a_4 = \frac{3}{8}, c_4 = 0, b_4 = \frac{3}{8}, p_4 = 0$$

- (1) 上の結果より $p_3 = \frac{1}{4}, p_4 = 0$.
- (2) 漸化式 ①, ③ より $n \geq 0$ に対して $a_{n+1} = b_{n+1}$, つまり $n \geq 1$ に対して $a_n = b_n$ が成り立つ。 (証明終)
- (3) $a_2 = b_2 = \frac{1}{2}$ である、 m が 2 以上の自然数のとき

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{1}{2}c_{2m-1} \\ &= \frac{1}{2} \left(a_{2m-2} + \frac{1}{2}b_{2m-2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} a_{2m-2}$$

これより $a_{2m} = a_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}$ である。これは $m = 1$ でも成り立つ。したがって

$$p_{2m+1} = \frac{1}{2} b_{2m} = \frac{1}{2} a_{2m} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}$$

である。

[2] \log は自然対数とし, $x \neq 0$ で定義された関数 $f(x) = x(\log|x|)^2$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) $0 < x \leq 1$ のとき $|\log x| < \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ が成り立つことを証明せよ。
 (2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ の値を求めよ。
 (3) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-2} \frac{dx}{f(x)}$ の値を求めよ。

解答

(1) $0 < x \leq 1$ において $\log x \leq 0$ なので $|\log x| = -\log x$ であるから,

$$-\log x < \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$$

を示せばよい。

$$g(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \log x \quad (0 < x \leq 1) \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -x^{-\frac{4}{3}} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \left(-x^{-\frac{1}{3}} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) \end{aligned}$$

である。 $0 < x \leq 1$ のとき, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \geq 1$ であるから $g'(x) \leq 0$ となり, $g(x)$ は $0 < x \leq 1$ で単調減少である。また, $g(1) = 3 + 0 = 3 > 0$ であるから, $0 < x \leq 1$ において $g(x) > 0$, すなわち $-\log x < \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ が成り立つので,

$$|\log x| < \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$$

が成り立つことが示された。 (証明終)

(2) (1) より, $0 < x \leq 1$ において, $|\log x| < \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ が成り立つので,

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\log x| < \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \\ \iff 0 &\leq (\log x)^2 < \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}} \\ \iff 0 &\leq x(\log x)^2 < \frac{9x}{\sqrt[3]{x^2}} \\ \iff 0 &\leq x(\log x)^2 < 9x^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow +0} 9x^{\frac{1}{3}} = 0$ であるから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x(\log x)^2 = 0$$

を得る。よって,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} x(\log|x|)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る.

また,

$$f(-x) = -x(\log|-x|)^2 = -x(\log|x|)^2 = -f(x)$$

となることから $f(x)$ は奇関数である. したがって, $x \rightarrow -0$ のときも同様に $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$ を得る.

以上より, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

- (3) $t \rightarrow -\infty$ より, $x < 0$ としてよいので, $f(x) = x\{\log(-x)\}^2$ である. $-x = u$ とおくと, $-dx = du$ であり, $x : t \rightarrow -2$ のとき, $u : -t \rightarrow 2$ である. よって,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-2} \frac{dx}{f(x)} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{-t}^2 \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{(\log u)^2} du \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{\log u} \right]_{-t}^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log(-t)} \right) \\ &= -\frac{1}{\log 2} \end{aligned}$$

[3] 座標空間内に4点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 2, 4)$ がある。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 原点 O から平面 ABC に垂線 OD を下ろす。点 D の座標を求めよ。
- (2) 四面体 $OABC$ に内接する球の半径を求めよ。

解答

(1) 平面 ABC 上の点 D は、

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= (1-s-t)\vec{OA} + s\vec{OB} + t\vec{OC} \\ &= (2-2s, 2s+2t, 4t)\end{aligned}$$

と表すことができる。また、 $\vec{AB} = (-2, 2, 0)$, $\vec{AC} = (0, 2, 4)$ である。

ここで、 $OD \perp AB$ かつ $OD \perp AC$ であるので、

$$\vec{OD} \cdot \vec{AB} = -2 \cdot (2-2s) + 2 \cdot (2s+2t) + 0 \cdot 4t = 0 \iff 2s+t=1$$

$$\vec{OD} \cdot \vec{AC} = 0 \cdot (2-2s) + 2 \cdot (2s+2t) + 4 \cdot 4t = 0 \iff s+5t=0$$

であることから、 $s = \frac{5}{9}$, $t = -\frac{1}{9}$ を得る。

したがって、 $\vec{OD} = \left(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{4}{9}\right)$ から $D\left(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{4}{9}\right)$ である。

別解

外積を用いれば、 $\vec{AB} \times \vec{AC} = (8, 8, -4)$ であることから、 \vec{AB} , \vec{AC} に垂直なベクトルのひとつを \vec{n} とすると、 $\vec{n} = (2, 2, -1)$ とおける。平面 ABC の方程式は

$$2(x-2) + 2y - z = 0 \iff 2x + 2y - z = 4$$

である。ここで、 $\vec{OD} = k\vec{n} = (2k, 2k, -k)$ と表せるので、平面の方程式に代入することにより

$$4k + 4k + k = 4 \iff k = \frac{4}{9}$$

これより $D\left(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{4}{9}\right)$ である。

(2) 四面体 OABC の体積を V 、表面積を S 、内接球の半径を r とすると、

$$V = \frac{1}{3}Sr$$

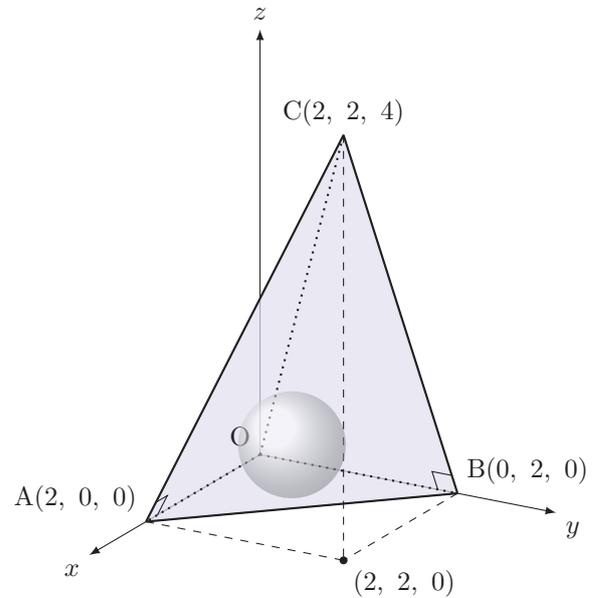
が成り立つ．ここで、三角形 OAB の面積を $\triangle OAB$ と表すこととすると、

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

$$\triangle OAC = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{8 \cdot 20 - 16} = 6 \end{aligned}$$



であるので、 $S = 4\sqrt{5} + 8$ である．

また、 $V = \frac{1}{3} \cdot \triangle OAB \cdot |C \text{ の } z \text{ 座標}| = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{8}{3}$ であるので、

$$V = \frac{1}{3}Sr$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3} = \frac{1}{3}(4\sqrt{5} + 8)r$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{2}{\sqrt{5} + 2} = 2\sqrt{5} - 4$$

[4] \log は自然対数とし、 $x > 1$ で定義された関数 $f(x) = \int_0^{\sqrt{\log x}} e^{t^2} dt$ について、次の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし、積分記号を含まない形で答えること。

(2) $p > 1, q > 1$ をみたす任意の実数 p, q に対して $\int_{\sqrt{\log p}}^{\sqrt{\log q}} e^{x^2} dx = \int_p^q g(x) dx$ が成り立つような連続関数 $g(x)$ を求めよ。

(3) $1 < a < b$ とする。 $\int_a^b \sqrt{\log x} dx + \int_{\sqrt{\log a}}^{\sqrt{\log b}} e^{x^2} dx$ の値を a, b を用いて表せ。

解答

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{(\sqrt{\log x})^2} (\sqrt{\log x})' \\ &= x \cdot \frac{1}{2x\sqrt{\log x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\log x}} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{\log p}}^{\sqrt{\log q}} e^{x^2} dx &= \int_{\sqrt{\log p}}^0 e^{x^2} dx + \int_0^{\sqrt{\log q}} e^{x^2} dx \\ &= f(q) - f(p) \\ &= \int_p^q f'(x) dx \end{aligned}$$

より、(定義域を $x > 1$ とすれば) $g(x) = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\log x}}$ である。

(3)

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{\log x} dx &= [x\sqrt{\log x}]_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{2x\sqrt{\log x}} dx \\ &= b\sqrt{\log b} - a\sqrt{\log a} - \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{\log x}} dx \end{aligned}$$

となるので、これと(2)より、

$$\int_a^b \sqrt{\log x} dx = b\sqrt{\log b} - a\sqrt{\log a} - \int_{\sqrt{\log b}}^{\sqrt{\log a}} e^{x^2} dx$$

ゆえに、

$$\int_a^b \sqrt{\log x} dx + \int_{\sqrt{\log a}}^{\sqrt{\log b}} e^{x^2} dx = b\sqrt{\log b} - a\sqrt{\log a}$$

である。

予想配点

[1] 25点 (1) 4+4 (2) 8 (3) 9

[2] 25点 (1) 9 (2) 8 (3) 8

[3] 25点 (1) 13 (2) 12

[4] 25点 (1) 8 (2) 8 (3) 9

講評

[1] [確率・数列] (標準)

確率漸化式の問題である。正六角形であることはあまり本質的ではなく、数直線上の4点を推移すると考えればよい。漸化式も非常に解きやすい設定になっている。できれば完答したい。

[2] [極限・数学Ⅲの微積分] (標準)

不等式と極限に関する問題である。(1)は、微分を利用する典型題なので、完答を狙いたい。 x の範囲から $\log x$ の符号がわかるので、先に絶対値を外しておくべきだろう。(2)は、はさみうちの原理を利用して極限を求める問題である。(1)の結果を利用したい。(3)は、先に定積分を計算してから極限をとれば良いだろう。(2)までができていなくてもこの問題だけ独立に解くこともできる。全体的に計算量は多くないので、丁寧に記述をして高得点を狙いたい。

[3] [空間座標] (やや易)

空間座標における四面体の内接球の半径を求める問題であった。方針が立てやすく、計算量も少ない問題であったため完答したい。

[4] [数学Ⅲの微積分] (やや難)

定積分で表された関数の微分に関する問題であった。

(1)は $\frac{d}{dx} \int_a^{h(x)} f(t) dt = f(h(x))h'(x)$ を正しく用いることができるかどうか問われている。(2)は左辺が $f(q) - f(p)$ であることに気づき、右辺の定積分の定義と結びつけられるかどうかポイントとなる。(3)は最初の定積分を部分積分すると、(2)の結果をうまく利用できることに気づく。

90分大問4題の出題であり形式的には昨年度と同じであった。手の付けにくい問題もあるが、全体的には昨年度より易化している。ただし、2026年度前期よりはやや難しい。大問1か2のいずれかと大問3を完答近くまで仕上げ、残りは半答くらいを目指したい。目標は70%。

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ

メルマガ無料登録で全教科配信! 本解答速報の内容に関するお問合せは… メビオ ☎0120-146-156

医学部進学予備校 ☎0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/	 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校 https://www.mebio-eishinkan.com/	☎03-3370-0410 https://yms.ne.jp/ ☎0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/	 登録はこちらから
--	--	--	--------------

2泊3日無料体験

授業 × 食堂 × 寮 を無料で体験できる!

タイムスケジュール	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00	21:00
1日目							面談・入寮				学力診断テスト(英語)	夕食	学力診断テスト(数学)	学力診断テスト(適性)
2日目	朝食	授業(数学)	授業(英語)	昼食	授業(理科1)	授業(理科2)	自習室で課題演習(質問可)	夕食	自習室で課題演習(質問可)					
3日目	朝食	課題提出テスト	授業(数学)	課題提出テスト	授業(英語)	昼食	面談・学習アドバイス							

無料体験期間
【第6回】3/15(日)～3/17(火)
【第7回】3/22(日)～3/24(火)

満席間近!
お申し込みはこちら▶

医学部進学予備校 フリーダイヤル ☎0120-146-156

校舎にて個別説明会も随時開催しています。
【受付時間】9:00～21:00 (土日祝可)

大阪府大阪市中央区石町2-3-12 ベルヴェア天満橋
天満橋駅(京阪/大阪メトロ谷町線)より徒歩