医学部進学予備校 メビオ
医学部専門予備校 YMS × 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

大阪医科薬科大学（後期）　数学

2026年 3月 10日実施

〔1〕 正六角形 ABCDEF があり，動点 P がこの六角形の頂点を移動する。動点 P は初め頂点 A にあり，1 分毎に辺で結ばれた隣の頂点のいずれかにそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する。頂点 D をゴール（終点）とし，動点 P がゴールに到着したら移動は終わりとする。

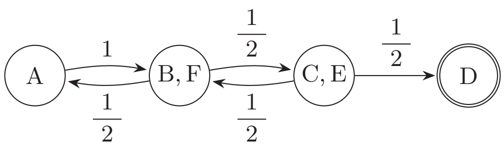
n を 0 以上の整数として，動点 P が n 分後に頂点 A にある確率を a_n，頂点 C または E にある確率を b_n，ゴールに到着する確率を p_n とおく。このとき，次の問いに答えよ。ただし，(1) は結果のみを解答せよ。

(1)　p_3，p_4 の値を求めよ。

(2)　n が自然数のとき $a_n = b_n$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　m を自然数とする。p_{2m+1} を m を用いて表せ。

解答



動点 P が n 分後に頂点 B または F にある確率を c_n とする．$a_0 = 1, c_0 = 0, b_0 = 0, p_0 = 0$ である．n を 0 以上の整数として次の漸化式が成り立つ．

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}c_n \cdots ①, \qquad c_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n \cdots ②,$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}c_n \cdots ③, \qquad p_{n+1} = \frac{1}{2}b_n \cdots ④$$

この漸化式より次がわかる．

$$a_1 = 0,\ c_1 = 1,\ b_1 = 0,\ p_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{2},\ c_2 = 0,\ b_2 = \frac{1}{2},\ p_2 = 0$$

$$a_3 = 0,\ c_3 = \frac{3}{4},\ b_3 = 0,\ p_3 = \frac{1}{4}$$

$$a_4 = \frac{3}{8},\ c_4 = 0,\ b_4 = \frac{3}{8},\ p_4 = 0$$

(1)　上の結果より $p_3 = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$, $p_4 = \mathbf{0}$.

(2)　漸化式 ①, ③ より $n \geqq 0$ に対して $a_{n+1} = b_{n+1}$，つまり $n \geqq 1$ に対して $a_n = b_n$ が成り立つ．　（証明終）

(3)　$a_2 = b_2 = \dfrac{1}{2}$ である，m が 2 以上の自然数のとき

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{1}{2}c_{2m-1} \\ &= \frac{1}{2}\left(a_{2m-2} + \frac{1}{2}b_{2m-2}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4}a_{2m-2}$$

これより $a_{2m} = a_2\left(\frac{3}{4}\right)^{m-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}$ である．これは $m=1$ でも成り立つ．したがって

$$p_{2m+1} = \frac{1}{2}b_{2m} = \frac{1}{2}a_{2m} = \boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}}$$

である．

〔2〕 log は自然対数とし，$x \fallingdotseq 0$ で定義された関数 $f(x) = x(\log|x|)^2$ について，次の問いに答えよ。

(1) $0 < x \leqq 1$ のとき $|\log x| < \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{t \to -\infty} \int_t^{-2} \frac{dx}{f(x)}$ の値を求めよ。

解答

(1) $0 < x \leqq 1$ において $\log x \leqq 0$ なので $|\log x| = -\log x$ であるから，

$$-\log x < \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$$

を示せばよい．

$g(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + \log x \ (0 < x \leqq 1)$ とおくと，

$$\begin{aligned} g'(x) &= -x^{-\frac{4}{3}} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x}\left(-x^{-\frac{1}{3}} + 1\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \end{aligned}$$

である．$0 < x \leqq 1$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \geqq 1$ であるから $g'(x) \leqq 0$ となり，$g(x)$ は $0 < x \leqq 1$ で単調減少である．また，$g(1) = 3 + 0 = 3 > 0$ であるから，$0 < x \leqq 1$ において $g(x) > 0$，すなわち $-\log x < \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$ が成り立つので，

$$|\log x| < \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$$

が成り立つことが示された．　（証明終）

(2) (1) より，$0 < x \leqq 1$ において，$|\log x| < \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} & 0 \leqq |\log x| < \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \\ \iff\ & 0 \leqq (\log x)^2 < \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}} \\ \iff\ & 0 \leqq x(\log x)^2 < \frac{9x}{\sqrt[3]{x^2}} \\ \iff\ & 0 \leqq x(\log x)^2 < 9x^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x \to +0} 9x^{\frac{1}{3}} = 0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{x \to +0} x(\log x)^2 = 0$$

を得る．よって，

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +0} f(x) &= \lim_{x \to +0} x(\log|x|)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る.

また,

$$f(-x)=-x(\log|-x|)^2=-x(\log|x|)^2=-f(x)$$

となることから $f(x)$ は奇関数である. したがって, $x\to -0$ のときも同様に $\lim_{x\to -0} f(x)=0$ を得る.

以上より, $\lim_{x\to 0} f(x)=\mathbf{0}$.

(3) $t\to -\infty$ より, $x<0$ としてよいので, $f(x)=x\{\log(-x)\}^2$ である. $-x=u$ とおくと, $-dx=du$ であり, $x:t\to -2$ のとき, $u:-t\to 2$ である. よって,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty}\int_t^{-2}\frac{dx}{f(x)}&=\lim_{t\to-\infty}\int_{-t}^{2}\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{(\log u)^2}du\\&=\lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{1}{\log u}\right]_{-t}^{2}\\&=\lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{1}{\log 2}+\frac{1}{\log(-t)}\right)\\&=\boldsymbol{-\frac{1}{\log 2}}\end{aligned}$$

〔3〕 座標空間内に 4 点 O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(2, 2, 4) がある。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 原点 O から平面 ABC に垂線 OD を下ろす。点 D の座標を求めよ。

(2) 四面体 OABC に内接する球の半径を求めよ。

解答

(1) 平面 ABC 上の点 D は,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= (2-2s,\ 2s+2t,\ 4t)\end{aligned}$$

と表すことができる．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 2,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 2,\ 4)$ である．
ここで，$\mathrm{OD}\perp\mathrm{AB}$ かつ $\mathrm{OD}\perp\mathrm{AC}$ であるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-2\cdot(2-2s)+2\cdot(2s+2t)+0\cdot 4t=0 \iff 2s+t=1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\cdot(2-2s)+2\cdot(2s+2t)+4\cdot 4t=0 \iff s+5t=0$$

であることから，$s=\dfrac{5}{9}$, $t=-\dfrac{1}{9}$ を得る．
したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(\dfrac{8}{9},\ \dfrac{8}{9},\ -\dfrac{4}{9}\right)$ から　$\mathrm{D}\left(\boldsymbol{\dfrac{8}{9},\ \dfrac{8}{9},\ -\dfrac{4}{9}}\right)$ である．

別解

外積を用いれば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(8,\ 8,\ -4)$ であることから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルのひとつを $\overrightarrow{n}$ とすると，$\overrightarrow{n}=(2,\ 2,\ -1)$ とおける．平面 ABC の方程式は

$$2(x-2)+2y-z=0 \iff 2x+2y-z=4$$

である．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{n}=(2k,\ 2k,\ -k)$ と表せるので，平面の方程式に代入することにより

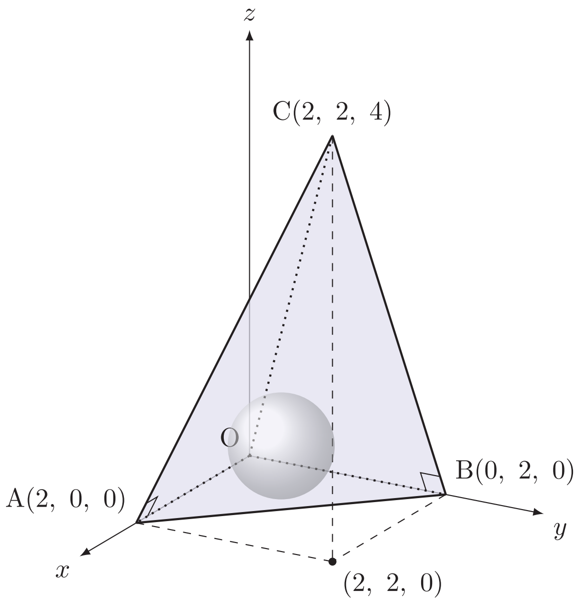
$$4k+4k+k=4 \iff k=\frac{4}{9}$$

これより $\mathrm{D}\left(\boldsymbol{\dfrac{8}{9},\ \dfrac{8}{9},\ -\dfrac{4}{9}}\right)$ である．

(2)　四面体 OABC の体積を V，表面積を S，内接球の半径を r とすると，

$$V = \frac{1}{3}Sr$$

が成り立つ．ここで，三角形 OAB の面積を △OAB と表すこととすると，



$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$$

$$\triangle\mathrm{OAC} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AC} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\triangle\mathrm{OBC} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{BC} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{8\cdot 20 - 16} = 6\end{aligned}$$

であるので，$S = 4\sqrt{5} + 8$ である．

また，$V = \dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot|\mathrm{C}$ の z 座標$| = \dfrac{1}{3}\cdot 2\cdot 4 = \dfrac{8}{3}$ であるので，

$$\begin{aligned}& V = \frac{1}{3}Sr \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{8}{3} = \frac{1}{3}(4\sqrt{5}+8)r \\ \Longleftrightarrow\ & r = \frac{2}{\sqrt{5}+2} = \mathbf{2\sqrt{5} - 4}\end{aligned}$$

〔4〕 log は自然対数とし，$x>1$ で定義された関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{\log x}} e^{t^2}dt$ について，次の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし，積分記号を含まない形で答えること。

(2) $p>1$，$q>1$ をみたす任意の実数 p，q に対して $\displaystyle\int_{\sqrt{\log p}}^{\sqrt{\log q}} e^{x^2}dx=\int_p^q g(x)dx$ が成り立つような連続関数 $g(x)$ を求めよ。

(3) $1<a<b$ とする。$\displaystyle\int_a^b \sqrt{\log x}dx+\int_{\sqrt{\log a}}^{\sqrt{\log b}} e^{x^2}dx$ の値を a，b を用いて表せ。

解答

(1)

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=e^{\left(\sqrt{\log x}\right)^2}\left(\sqrt{\log x}\right)'\\
&=x\cdot\frac{1}{2x\sqrt{\log x}}\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{\log x}}}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\int_{\sqrt{\log p}}^{\sqrt{\log q}} e^{x^2}\,dx&=\int_{\sqrt{\log p}}^{0} e^{x^2}\,dx+\int_0^{\sqrt{\log q}} e^{x^2}\,dx\\
&=f(q)-f(p)\\
&=\int_p^q f'(x)\,dx
\end{aligned}
$$

より，（定義域を $x>1$ とすれば）$g(x)=f'(x)=\boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{\log x}}}$ である．

(3)

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{\log x}\,dx&=\left[x\sqrt{\log x}\right]_a^b-\int_a^b x\cdot\frac{1}{2x\sqrt{\log x}}\,dx\\
&=b\sqrt{\log b}-a\sqrt{\log a}-\int_a^b\frac{1}{2\sqrt{\log x}}\,dx
\end{aligned}
$$

となるので，これと (2) より，

$$
\int_a^b \sqrt{\log x}\,dx=b\sqrt{\log b}-a\sqrt{\log a}-\int_{\sqrt{\log b}}^{\sqrt{\log a}} e^{x^2}\,dx
$$

ゆえに，

$$
\int_a^b \sqrt{\log x}\,dx+\int_{\sqrt{\log a}}^{\sqrt{\log b}} e^{x^2}\,dx=\boldsymbol{b\sqrt{\log b}-a\sqrt{\log a}}
$$

である．

予想配点

〔1〕　25 点　(1) $4+4$　(2) 8　(3) 9

〔2〕　25 点　(1) 9　(2) 8　(3) 8

〔3〕　25 点　(1) 13　(2) 12

〔4〕　25 点　(1) 8　(2) 8　(3) 9

講評

〔1〕 ［確率・数列］（標準）

確率漸化式の問題である．正六角形であることはあまり本質的ではなく，数直線上の 4 点を推移すると考えればよい．漸化式も非常に解きやすい設定になっている．できれば完答したい．

〔2〕 ［極限・数学Ⅲの微積分］（標準）

不等式と極限に関する問題である．(1) は，微分を利用する典型題なので，完答を狙いたい．x の範囲から $\log x$ の符号がわかるので，先に絶対値を外しておくべきだろう．(2) は，はさみうちの原理を利用して極限を求める問題である．(1) の結果を利用したい．(3) は，先に定積分を計算してから極限をとれば良いだろう．(2) までができていなくてもこの問題だけ独立に解くこともできる．全体的に計算量は多くないので，丁寧に記述をして高得点を狙いたい．

〔3〕 ［空間座標］（やや易）

空間座標における四面体の内接球の半径を求める問題であった．方針が立てやすく，計算量も少ない問題であったため完答したい．

〔4〕 ［数学Ⅲの微積分］（やや難）

定積分で表された関数の微分に関する問題であった．

(1) は $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^{h(x)} f(t)\,dt = f(h(x))h'(x)$ を正しく用いることができるかどうかが問われている．(2) は左辺が $f(q)-f(p)$ であることに気づき，右辺の定積分の定義と結びつけられるかどうかがポイントとなる．(3) は最初の定積分を部分積分すると，(2) の結果をうまく利用できることに気づく．

90 分大問 4 題の出題であり形式的には昨年度と同じであった．手の付けにくい問題もあるが，全体的には昨年度と比較してほぼ横ばいである．ただし，2026 年度前期よりはやや難しい．大問 1 か 2 のいずれかと大問 3 を完答近くまで仕上げて，残りは半答くらいを目指したい．目標は 70%．

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ