解答速報

大阪医科薬科大学（前期）　数学

2026年 2月 10日実施

〔1〕 n を 1 以上の整数とする。赤球 1 個と白球 $(n-1)$ 個が入っている袋から球を 1 個取り出し，色を確認して袋に戻す試行を n 回繰り返す。このとき赤球を少なくとも 1 回取り出す確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_4 を求めよ。

(2) p_n を n で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

解答

(1) $n=4$ のときは 1 回の試行につき，赤球を取り出す確率は $\dfrac{1}{4}$ であり，白球を取り出す確率は $\dfrac{3}{4}$ である．4 回繰り返して赤球を少なくとも 1 回取り出す事象は，4 回すべて白球を取り出す事象の余事象であるので，

$$p_4 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{175}{256}}$$

(2) 1 回の試行につき，赤球を取り出す確率は $\dfrac{1}{n}$ であり，白球を取り出す確率は $\dfrac{n-1}{n}$ である．n 回繰り返して赤球を少なくとも 1 回取り出す事象は，n 回すべて白球を取り出す事象の余事象であるので，

$$p_n = \boldsymbol{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p_n &= \lim_{n\to\infty}\left\{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right\} \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right\}^{-1} \\
&= 1 - e^{-1} \\
&= \boldsymbol{1 - \frac{1}{e}}
\end{aligned}$$

〔2〕 a, b を実数とし，x の方程式

$$(a^2+b^2-4)x^2+2(a+b-2)x+1=0 \quad \cdots(*)$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $(*)$ が $x=2$ を重解として持つような $(a,\ b)$ の組をすべて求めよ。

(2) 方程式 $(*)$ がただ 1 つの実数解を持つような a と b の条件を求め，この条件を満たす点 $(a,\ b)$ の存在範囲を ab 平面上に図示せよ。ただし 2 重解の場合は解の個数を 1 つと数える。

解答

(1) $(*)$ の左辺を $f(x)$ とおく．このとき，$a^2+b^2=4$ ならば x の 1 次方程式となり，重解を持たない．
よって $(*)$ の判別式を D とすると，$x=2$ を重解として持つ条件は，$a^2+b^2 \fallingdotseq 4$ かつ $f(2)=0$ かつ $D=0$ である．

$$f(2)=0 \iff 4a^2+4b^2+4a+4b-23=0\cdots①$$

であり，

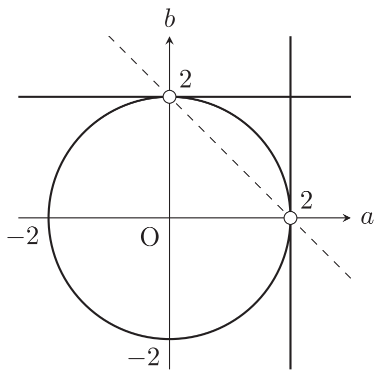
$$\begin{aligned}\frac{D}{4}=0 &\iff (a+b-2)^2-(a^2+b^2-4)=0\\ &\iff ab-2a-2b+4=0\\ &\iff (a-2)(b-2)=0\cdots②\end{aligned}$$

である．② より $a=2$ または $b=2$ であり，これらを ① に代入することにより，
$(a,\ b)=\left(\mathbf{2},\ -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right),\ \left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{2}\right)$ を得る．（これらは $a^2+b^2 \fallingdotseq 4$ を満たす）

(2) (i) $a^2+b^2 \fallingdotseq 4$ のとき，
(1) の議論により，求める条件は $a=2$ または $b=2$ である．ただし，$(a,\ b)=(0,\ 2),\ (2,\ 0)$ を除く．

(ii) $a^2+b^2=4$ のとき，
$(*) \iff 2(a+b-2)x+1=0$ となり，これがただ 1 つの実数解を持つには，$a+b \fallingdotseq 2$ であればよい．

よって $(a,\ b)$ の存在範囲は，円 $a^2+b^2=4$ または 直線 $a=2$ または $b=2$ であり，図は以下の太線部となる．（$(a,\ b)=(0,\ 2),\ (2,\ 0)$ を除く）

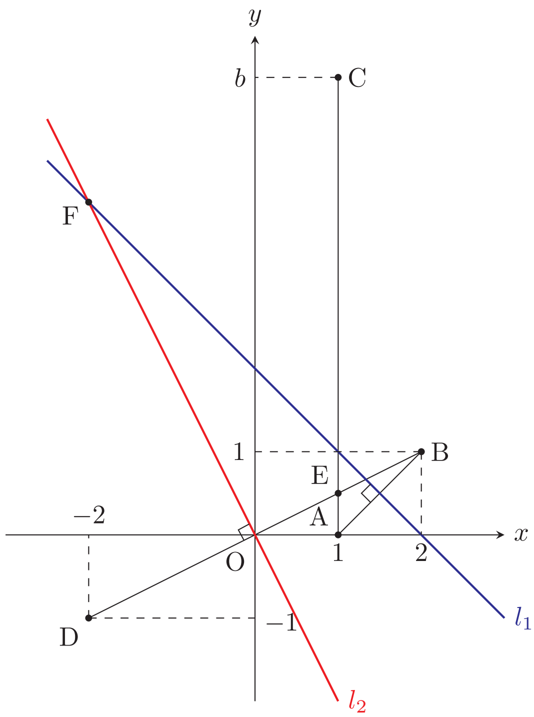


〔3〕 複素数平面上の 4 点 A(1)，B$(2+i)$，C$(1+bi)$，D$(-2-i)$ を考える。ただし，i は虚数単位であり，b は $b>5$ を満たす実数である。線分 AC と線分 BD の交点を E とし，また，線分 AB の垂直二等分線 l_1 と線分 BD の垂直二等分線 l_2 の交点を F とする。次の問いに答えよ。ただし (1) は結果のみ解答せよ．

(1) 点 E を表す複素数 α と点 F を表す複素数 β を求めよ。

(2) 点 C は $b>5$ を満たしながら複素数平面上を動くものとする。2 点 A, B を焦点とする楕円で，点 C と点 D の両方を通るものは存在しないことを示せ。

解答



(1) xy 座標平面で考える．

直線 AC は $x=1$，直線 BD は $y=\dfrac{1}{2}x$ と表されるので連立することにより点 E の座標は $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ となる．よって点 E を表す複素数は $\alpha=\boldsymbol{1+\dfrac{1}{2}i}$ である．

次に，$l_1: y=-x+2$, $l_2: y=-2x$ となるので，連立することにより点 F の座標は $(-2,\ 4)$ となる．よって点 F を表す複素数は $\beta=\boldsymbol{-2+4i}$ である．

(2) A, B を焦点とする楕円が点 C も点 D も通るとき，楕円の定義により

$$\mathrm{AC}+\mathrm{BC}=\mathrm{AD}+\mathrm{BD}\cdots ①$$

が成り立たなければならない．ここで，

$$\mathrm{AC}+\mathrm{BC}=b+\sqrt{(b-1)^2+1}\ \ \bigl(=f(b)\text{ とおく}\bigr)$$

であり，$f(b)$ は $b>5$ において単調増加関数なので，

$$f(b)>f(5)=5+\sqrt{17}>5+4=9$$

である．一方，

$$\mathrm{AD}+\mathrm{BD}=\sqrt{10}+2\sqrt{5}=\sqrt{10}+\sqrt{20}<4+5=9$$

であり，$\mathrm{AC}+\mathrm{BC}>9>\mathrm{AD}+\mathrm{BD}$ となるので ① は成立しない．すなわち，2 点 A, B を焦点とする楕円で，点 C と点 D の両方を通るものは存在しない．（証明終）

〔4〕 xy 平面上で，半径 1 の円板 D が x 軸に接しながら正の方向へ滑ることなく 1 回転する。このとき D 上の定点 P の描く曲線 F を考える。最初，D の中心 C は座標 $(0,\ 1)$ の位置に，点 P は座標 $(0,\ 1-a)$ の位置にあるものとする。ただし $0<a<1$ とする。次の問いに答えよ。

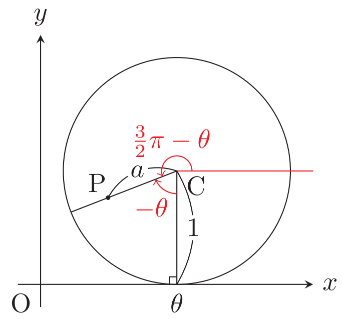
(1) 円板 D が最初の位置から角 θ だけ回転したとき，中心 C は点 $(\theta,\ 1)$ に移動する。このときの点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$x=\theta-a\sin\theta$, $y=1-a\cos\theta$ となることを示せ。ただし $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする。

(2) 曲線 F の概形をかけ。ただし曲線の凹凸を調べる必要はない。

(3) 曲線 F と x 軸，直線 $x=0$, $x=2\pi$ で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) 円板が正の方向へ θ だけ回転したとき，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ が x 軸の正の向きとなす角は $\dfrac{3\pi}{2}-\theta$ である．したがって，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \left(a\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right),\ a\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\right)\\ &= (-a\sin\theta,\ -a\cos\theta)\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\\ &= (\theta,\ 1)+(-a\sin\theta,\ -a\cos\theta)\\ &= (\theta-a\sin\theta,\ 1-a\cos\theta)\end{aligned}$$

ゆえに $x=\theta-a\sin\theta$, $y=1-a\cos\theta$ である．　（証明終）

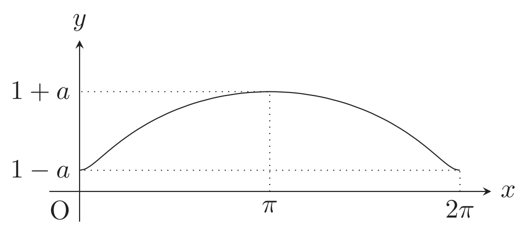
(2) $x=\theta-a\sin\theta$ より $\dfrac{dx}{d\theta}=1-a\cos\theta$ である．$0<a<1$ より $-1<a\cos\theta<1$ なので，

$$\frac{dx}{d\theta}=1-a\cos\theta>0$$

となり，x は θ に対して常に単調に増加する．また，$\dfrac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$ である．これらから，曲線 F についての増減は以下の通りとなる．

θ	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$+$	$+$	$+$	
$\dfrac{dy}{d\theta}$	0	$+$	0	$-$	0
(x,y)	$(0,1-a)$	$\nearrow$	$(\pi,1+a)$	$\searrow$	$(2\pi,1-a)$

したがって F の概形は下の図のようになる．



(3) 求める体積 V は

$$V=\int_0^{2\pi}\pi y^2 dx$$

であり，$x : 0 \to 2\pi$ のとき $\theta : 0 \to 2\pi$，$dx = (1 - a\cos\theta)d\theta$ より

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - a\cos\theta)^2 (1 - a\cos\theta) d\theta \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - a\cos\theta)^3 d\theta \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3a\cos\theta + 3a^2\cos^2\theta - a^3\cos^3\theta) d\theta \end{aligned}$$

ここで，$n = 1$，3 のとき $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^n\theta d\theta = 0$ であり，$\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \pi$ であるから

$$\begin{aligned} V &= \pi \left(2\pi - 3a \cdot 0 + 3a^2 \cdot \pi - a^3 \cdot 0\right) \\ &= \pi(2\pi + 3\pi a^2) \\ &= \boldsymbol{\pi^2(2 + 3a^2)} \end{aligned}$$

的中!!

12/13 大阪医科薬科大学攻略講座

1/18 大阪医科薬科大学対策授業

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある．半径 $\dfrac{1}{n}$ （n は自然数）の円 C_n が， C に外接しながらすべることなく反時計回りに転がるとき． C_n 上の点 P の軌跡を考える．ただし，最初 P は点 A(1, 0) に一致していたとする．

(1)　O を端点とし C_n の中心を通る半直線が x 軸の正の向きとなす角が θ となるときの P の座標を n と θ で表せ．

予想配点

〔1〕　20 点　(1) 5　(2) 5　(3) 10

〔2〕　25 点　(1) 12　(2) 13

〔3〕　25 点　(1) 5 + 5　(2) 15

〔4〕　30 点　(1) 10　(2) 10　(3) 10

講評

〔1〕 ［確率・極限］（易）

球を取り出す事象の余事象の確率に関する問題．(1)(2) は確実にとっておきたい．(3) もネイピア数 (自然対数の底 e) の定義を正しく用いて正答させたいところである．

〔2〕 ［2 次方程式・領域］（やや易）

2 次方程式に関する問題．最高次の係数が文字であるので 0 になる場合を忘れず考慮する必要があるが解きやすい問題であった．判別式を用いても係数比較でもよいだろう．この大問も完答を目指したいところである．

〔3〕 ［複素数平面・2 次曲線］（標準）

(1) は座標平面で考えるとやりやすかっただろう．(2) は楕円の定義（2 定点からの距離の和が等しい点の軌跡）を用いることがポイントである．$\mathrm{AC}+\mathrm{BC}=\mathrm{AD}+\mathrm{BD}$ となるときの b の値を求めて 5 と比較することはできるのだが，根号が多く評価がややしづらいので，$\mathrm{AC}+\mathrm{BC}$ が b について単調増加であることからその下限値を考えたい．

〔4〕 ［数Ⅲ微積分］（標準）

トロコイドに関する問題であった．(1) で点 P のパラメータ表示を証明する必要があったが，結果が与えられているため，仮に証明がうまくできなかったとしても結果を用いて (2) のグラフの概形や (3) の回転体の体積は正答させておきたいところである．

90 分大問 4 題の出題であり形式的には昨年度と同じであった．今年はすべての大問が手を出しやすく，難問がないセットであった．大問 1 と 2 を完答近くまで仕上げて，大問 3 の (1)，大問 4 の (2)(3) あたりを取っておきたいところである．トロコイドの導出に関しては解いた経験の有無で少し差がついたかもしれない．目標は 80%.

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ