解答速報

久留米大学医学部（推薦）　数学

2024年11月16日実施

※空欄に適切な解を入れよ．複数の解がある場合には「，（コンマ）」で区切ってすべての解を記入すること．

1．数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$T_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$$

と定める．さらに，自然数 n に対して

$$T_n = n^2(3n - a_n + 3) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしているとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a_1 = \boxed{\text{ア}}$，$a_2 = \boxed{\text{イ}}$ である．

(2) T_n，T_{n-1} の間に成り立つ関係式を用いて a_n を消去して考えると，$T_n = \boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) $a_n = \boxed{\text{エ}}$ である．

解答

ア 3　イ $\dfrac{11}{2}$　ウ $\dfrac{1}{4}n(n+2)(3n+1)$　エ $\dfrac{9n^2+5n-2}{4n}$

解説

$$T_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n \quad \cdots①$$
$$T_n = n^2(3n - a_n + 3) \quad \cdots② \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とする．

(1) ② から $T_1 = 6 - a_1$ が得られるので，① において $n = 1$ であるときを考えて，

$$T_1 = a_1 \iff 6 - a_1 = a_1$$
$$\iff a_1 = \mathbf{3}$$

同様にして ② から $T_2 = 4(9 - a_2)$ が得られ，① において $n = 2$ であるときを考えることで，

$$T_2 = a_1 + 2a_2 \iff 4(9 - a_2) = a_1 + 2a_2$$
$$\iff 36 - 4a_2 = 3 + 2a_2$$
$$\iff a_2 = \mathbf{\frac{11}{2}}$$

(2) ② から

$$T_n = n^2\{(3n+3) - a_n\} \iff T_n = n^2(3n+3) - n^2a_n$$

$$\iff n^2a_n = 3n^2(n+1) - T_n \cdots ③$$

を得る．$n \geqq 2$ であるとき，① により $T_n - T_{n-1} = na_n$ が成り立つから，③ を代入することで，

$$\begin{aligned} T_n - T_{n-1} = na_n &\iff nT_n - nT_{n-1} = n^2a_n \\ &\iff nT_n - nT_{n-1} = 3n^2(n+1) - T_n \\ &\iff (n+1)T_n - nT_{n-1} = 3n^2(n+1) \cdots ④ \end{aligned}$$

④ を数列 $\{(n+1)T_n\}$ の漸化式と考えて解くと，

$$\begin{aligned} (n+1)T_n &= 2T_1 + \sum_{k=2}^{n} 3k^2(k+1) \\ &= 6 + \left\{\sum_{k=1}^{n} 3k^2(k+1) - 6\right\} \\ &= 6 + 3\cdot\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2) - 6 \\ &= 3\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\} \\ &= 3\cdot\frac{1}{12}n(n+1)\left\{3n(n+1)+2(2n+1)\right\} \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(3n^2+7n+2) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(3n+1) \end{aligned}$$

よって, この両辺を $(n+1)$ で割ることで, $T_n = \boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+2)(3n+1)}$ $\cdots⑤$ を得る．この結果は, $T_1 = a_1 = 3$ も満たすことが分かる．

(3)　⑤ を ③ に代入することで，次のように a_n を求めることができる．

$$\begin{aligned} n^2a_n = 3n^2(n+1) - T_n &\iff n^2a_n = 3n^2(n+1) - \frac{1}{4}n(n+2)(3n+1) \\ &\iff a_n = 3(n+1) - \frac{(n+2)(3n+1)}{4n} \\ &\iff a_n = \frac{12n(n+1) - (n+2)(3n+1)}{4n} \\ &\iff a_n = \boldsymbol{\frac{9n^2+5n-2}{4n}} \end{aligned}$$

別解

T_n を経由せずに直接一般項 a_n を求めることもできる．

$na_n = b_n$ とおくと，

$$\begin{aligned} &① \quad より \quad T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \cdots ①' \\ &② \quad より \quad T_n = 3n^2(n+1) - nb_n \cdots ②' \end{aligned}$$

$n \geqq 2$ のとき，$①'$ より $T_n - T_{n-1} = b_n$ であり，$②'$ より

$$T_n - T_{n-1} = 3n^2(n+1) - nb_n - 3(n-1)^2n + (n-1)b_{n-1}$$

$$= -nb_n + (n-1)b_{n-1} + 9n^2 - 3n$$

である．よってこれらから

$$\begin{aligned} & b_n = -nb_n + (n-1)b_{n-1} + 9n^2 - 3n \\ \iff & (n+1)b_n = (n-1)b_{n-1} + 9n^2 - 3n \end{aligned}$$

を得る．この両辺を n 倍すると

$$(n+1)nb_n = n(n-1)b_{n-1} + 9n^3 - 3n^2$$

となるので，$\{(n+1)nb_n\}$ の階差数列を考えて

$$\begin{aligned} (n+1)nb_n &= 2\cdot 1\cdot b_1 + \sum_{k=2}^{n}(9k^3 - 3k^2) \\ &= 6 + \sum_{k=1}^{n}(9k^3 - 3k^2) - (9-3) \\ &= 9\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

を得る．これを $n(n+1)$ で割ることで

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{9}{4}n(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1) \\ &= \frac{9n^2+5n-2}{4} \end{aligned}$$

となるので，$a_n = \dfrac{b_n}{n} = \boldsymbol{\dfrac{9n^2+5n-2}{4n}}$ である．（これは $n=1$ でも成り立つ）

2.　以下，$a,\ b$ は自然数とし，$a,\ b$ の最小公倍数を L，最大公約数を G とする．

たとえば，$a,\ b$ を素因数分解し，$a=2^3\cdot 3\cdot 5,\ b=2^2\cdot 3^2\cdot 7$ のとき，$a,\ b$ の最大公約数は $2^2\cdot 3$ で，$a,\ b$ は両方ともこれを公約数にもつ．これを図 1 の におき，それ以外に a がもつ $2\cdot 5$ を におき，b がもつ $3\cdot 7$ を におくと考える．すると，$a=(2\cdot 5)\cdot(2^2\cdot 3),\ b=(2^2\cdot 3)\cdot(3\cdot 7)$ で，$L=(2\cdot 5)\cdot(2^2\cdot 3)\cdot(3\cdot 7)$ が成り立つ．$a=2,\ b=6$ のときは図 2 のように考え， には入るべき素因数がないから，そこには 1 を記入することにする．必要があれば，この考え方をヒントにして，次の問いに答えよ．

図 1

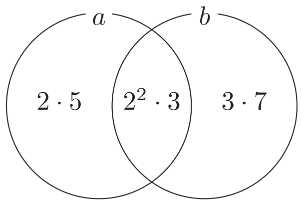
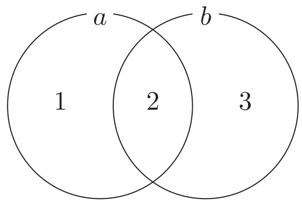


図 2



(1)　2310 を素因数分解すると $\boxed{\text{ア}}$ となる．次に，$L=2310$ になるような $a,\ b$ について $(a,\ b)$ は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある．ただし，たとえば $(a,\ b)=(1,\ 2310)$ と $(a,\ b)=(2310,\ 1)$ は異なる組であると考える．この区別は以下の設問でも適用する．

(2)　$x,\ y,\ z$ は 0 以上の整数で，

$$x+y+z=4$$

を満たすとき，$(x,\ y,\ z)$ は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある．ただし，たとえば $(x,\ y,\ z)=(4,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 4)$ は異なる組である．

(3)　$L=1680$ になるような $a,\ b$ について $(a,\ b)$ は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある．

解答

ア $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$　イ 243　ウ 15　エ 243

解説

(1)　$2310=\mathbf{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}$ である．

$a=AG,\ b=BG$ とすると $A,\ B$ は互いに素であり $L=ABG$ となる．$2310=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$ のうち 2 は $A,\ B,\ G$ のいずれか 1 つの素因数になればよく，3, 5, 7, 11 についても同様である．したがって $A,\ B,\ G$ の組，すなわち $(a,\ b)$ の組は全部で $3^5=\mathbf{243}$ 通りである．

(2)　○○○○||の並べ方を対応させて考えればよい．(たとえば ○○○||○ $\leftrightarrow (x,\ y,\ z)=(3,\ 0,\ 1)$) これより，

$\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}=\mathbf{15}$ 通り．

(3)　$L=ABG=1680=2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ である．3, 5, 7 はそれぞれ $A,\ B,\ G$ のいずれか 1 つの素因数になればよい．$G,\ A,\ B$ をそれぞれ素因数分解したときの 2 の個数を $g',\ a',\ b'$ とすると，$g'+a'+b'=4$ であり，$A,\ B$ は互いに素であるので $a',\ b'$ の少なくとも一方は 0 でなければいけない．そのような組は $(g',\ a',\ b')=(4,\ 0,\ 0),\ (3,\ 1,\ 0),\ (3,\ 0,\ 1),\ (2,\ 2,\ 0),\ (2,\ 0,\ 2),\ (1,\ 3,\ 0),\ (1,\ 0,\ 3),\ (0,\ 4,\ 0),\ (0,\ 0,\ 4)$ の 9 通りである．

以上より求める $(a,\ b)$ の組は $3^3\times 9=\mathbf{243}$ 通りである．

3. θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ を動く実数であり，a は実数の定数である．

(1) $x = -\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ とする．x のとる値の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である．また $\sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta$ を x を用いて表すと $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) 曲線 $y = x^2 + 2$ と直線 $y = a(2x-1)$ が $x < 0$ で接するとき $a = \boxed{\text{ウ}}$ であり，接点の x 座標は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) $f(\theta) = -\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + 2a(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta) + a + 4$ とする．方程式 $f(\theta) = 0$ の解の個数を N とする．$N \geqq 1$ になる a の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である．最大の N は $N = \boxed{\text{カ}}$ であり，そのときの a の値の範囲は $\boxed{\text{キ}}$ である．

解答

ア $-2 \leqq x \leqq 1$　イ $-x^2+2$　ウ -1　エ -1　オ $a \leqq -1,\ 3 \leqq a$　カ 3　キ $-\dfrac{6}{5} < a < -1$

解説

(1) $x = 2\sin\left(\theta + \dfrac{5}{6}\pi\right)$ と変形できる．

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $\dfrac{5}{6}\pi \leqq \theta + \dfrac{5}{6}\pi \leqq \dfrac{11}{6}\pi$ であり，この範囲において $-1 \leqq \sin\left(\theta + \dfrac{5}{6}\pi\right) \leqq \dfrac{1}{2}$ である．ゆえに $\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 1}$ である．また，

$$
\begin{aligned}
x^2 &= (-\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)^2 = 3\sin^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta \\
&= 3\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} - \sqrt{3}\sin 2\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2} \\
&= -\sqrt{3}\sin 2\theta - \cos 2\theta + 2
\end{aligned}
$$

となるので，$\sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta = \boldsymbol{-x^2+2}$ である．

(2) $x^2 + 2 = a(2x-1) \iff x^2 - 2ax + a + 2 = 0 \cdots$① の判別式を D とすると，

$$
\frac{D}{4} = a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1)
$$

であるので，① が重解をもつのは $a = 2,\ -1$ のときである．

$a = 2$ のとき，① $\iff (x-2)^2 = 0 \iff x = 2$ となるので不適．

$a = -1$ のとき，① $\iff (x+1)^2 = 0 \iff x = -1$ となり，適する．

したがって，$a = \boldsymbol{-1}$ であり，接点の x 座標は $x = \boldsymbol{-1}$ である．

(3)

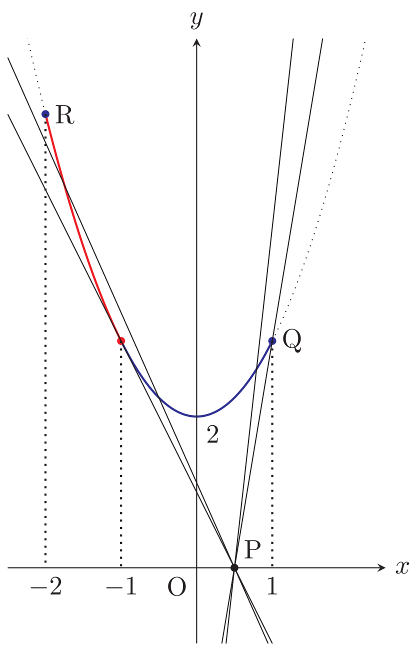
$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= -(\sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta) + 2a(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta) + a + 4 \\
&= -(-x^2+2) + 2a(-x) + a + 4 = x^2 - 2ax + a + 2
\end{aligned}
$$

であり，(1) より $-2 \leqq x \leqq 1$ であることから，

$$
\begin{aligned}
N \geqq 1 &\iff f(\theta) = 0 \text{ の解が存在する} \\
&\iff \text{①が } -2 \leqq x \leqq 1 \text{ を満たす解をもつ} \\
&\iff \text{曲線 } y = x^2 + 2 \text{ と直線 } y = a(2x-1) \text{ が } -2 \leqq x \leqq 1 \text{ の範囲で共有点をもつ}
\end{aligned}
$$

である．

直線 $y=a(2x-1)$ (以下，ℓ とおく) は a の値にかかわらず，定点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通る．この点を P とする．また，図のように曲線 $y=x^2+2$ の $x=1,\ -2$ における点をそれぞれ Q，R とする．ℓ の傾きは $2a$ であり，ℓ が点 Q $(1,\ 3)$ を通るとき



$$3=a(2-1) \iff a=3$$

となる．よって図から，ℓ が $-2 \leqq x \leqq 1$ で曲線 $y=x^2+2$ と共有点をもつ，つまり $N \geqq 1$ になる a の範囲は $\boldsymbol{a \leqq -1,\ 3 \leqq a}$ である．

また，$x=2\sin\left(\theta+\dfrac{5}{6}\pi\right)$ を満たす θ の個数は

$x>1$	のとき	0 個
$-1<x \leqq 1$	のとき	1 個（図の青い部分）
$-2<x \leqq -1$	のとき	2 個（図の赤い部分）
$x=-2$	のとき	1 個
$x<-2$	のとき	0 個

である．

① を満たす x は高々 2 つであるが，図から，$-2<x \leqq -1$ の範囲で異なる 2 個の共有点をもつことはないので $N=4$ にはなり得ない．ℓ が $-2<x<-1$ の範囲で $y=x^2+2$ と共有点をもつとき，$-1<x<0$ の範囲でも必ず共有点をもつ．このとき $N=3$ となるから，最大の N は $N=\mathbf{3}$ である．ℓ が点 R $(-2,\ 6)$ を通るとき，$6=a(-4-1) \iff a=-\dfrac{6}{5}$ であるので，$N=3$ となるときの a の範囲は $\boldsymbol{-\dfrac{6}{5}<a<-1}$ である．

4. あるイベント会場に司会者の S さん，チーム a の A, B, C，チーム d の D, E, F の合計 7 人がいる．チーム a の 3 人とチーム d の 3 人は面識はない．A, B, C の各人は D, E, F の誰か一人を無作為に等確率で選ぶ．D, E, F の各人は A, B, C の誰か一人を無作為に等確率で選ぶ．お互いが指定した者同士がいれば，『新たな友達』になる．たとえば A さんが D さんを指定し，D さんが A さんを指定すれば A さんと D さんは『新たな友達』になる．ただし，誰が誰を指定したかは S さんの前にあるパネルに瞬時に表示され，S さんだけに分かるとする．S さんの発言は常に正しいとする．

(1) 『新たな友達』が 3 組できる確率は $\boxed{\text{ア}}$ ，『新たな友達』が 2 組できる確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) S さんが言った．

「A さん，ある人と『新たな友達』になりましたよ．」

このとき，B さんが誰かと『新たな友達』になる条件付き確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) S さんが言った．

「A さん，ある人と『新たな友達』になりましたよ．D さん，ある人と『新たな友達』になりましたよ．」

このとき，A さんと D さんが『新たな友達』である条件付き確率は $\boxed{\text{エ}}$ である．

解答

ア $\dfrac{2}{243}$　イ $\dfrac{16}{81}$　ウ $\dfrac{2}{9}$　エ $\dfrac{9}{13}$

解説

(1) A, B, C は各人とも D, E, F の 3 人を等確率で選び，D, E, F は各人とも A, B, C の 3 人を等確率で選ぶので，選び方の総数は $3^6(=729)$ である．これを確率の分母として考える．

『新たな友達』が 3 組できる場合，その 3 組を (A, T), (B, U), (C, V) とする．ただし T, U, V は D, E, F の並べ替えである．その並べ替え方は $3!=6$ 通りあり，各並べ替え方は A〜F の指定する相手を一意に決定するので，求める確率は $\dfrac{6}{3^6}=\mathbf{\dfrac{2}{243}}$ である．

『新たな友達』が 2 組できる場合，その 2 組の人の決め方は ${}_3C_2\times{}_3C_2\times 2=18$ 通りある．この 18 通りのどれに対してもその 2 組ができるような 6 人の指定の仕方の場合の数は等しい．

仮にその 2 組を (A, D), (B, E) だとしてみよう．この場合 A, B, D, E の指定する相手は確定している．C, F の相手の選び方は全部で $3\times3=9$ 通りあるのだが，そのうち C $\to$ F かつ F $\to$ C だけは『新たな友達』が 3 組になってしまうので不適である．したがってこの場合の数は $9-1=8$ 通り．

求める確率は $\dfrac{18\times8}{3^6}=\mathbf{\dfrac{16}{81}}$ である．

(2) A が誰かと友だちになるという事象を X, B が誰かと友だちになるという事象を Y とする．求める条件付き確率は， $P_X(Y)=\dfrac{P(X\cap Y)}{P(X)}$ である．

X が起こるのは，A の指定した相手が A を指定する場合なので，その確率は $P(X)=\dfrac{1}{3}$ である．

$X\cap Y$ が起こるのは，A の指定した相手 (T とする) が A を指定し，B が T 以外（U とする）を指定して，U が B を指定する場合なので，その確率は $P(X\cap Y)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$ である．

したがって求める確率は $\dfrac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{3}}=\mathbf{\dfrac{2}{9}}$ である．

(3) A が誰かと友だちになるという事象を X, D が誰かと友だちになるという事象を Z, A と D が友だちになるという事象を W とする．求める条件付き確率は $P_{X\cap Z}(W)=\dfrac{P(W)}{P(X\cap Z)}$ である．（ $W\subset X\cap Z$ だから $P(X\cap Z\cap W)=P(W)$ である．）

W は A が D を指定し，D が A を指定する事象だから $P(W)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$ である．

$X\cap Z\cap\overline{W}$ は，A が D 以外（T とする）を指定，T が A を指定，D が A 以外（U とする）を指定，U が D を指定する事象だから，$P(X\cap Z\cap\overline{W})=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{81}$ である．以上より

$$P_{X\cap Z}(W)=\frac{P(W)}{P(X\cap Z)}=\frac{P(W)}{P(X\cap Z\cap\overline{W})+P(W)}=\frac{\dfrac{1}{9}}{\dfrac{4}{81}+\dfrac{1}{9}}=\frac{9}{4+9}=\boldsymbol{\frac{9}{13}}$$

5．実数 p に対して，2 次方程式

$$x^2-(2p+1)x+2(p^2-p-1)=0$$

の異なる 2 つの実数解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とする．

(1) 解と係数の関係より，$\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ を p を用いて表すと

$$\alpha+\beta=\boxed{\quad ア \quad},\ \alpha\beta=\boxed{\quad イ \quad}$$

である．この 2 式から p を消去して得られる $\alpha,\ \beta$ に関する関係式を $\alpha\beta$ 平面上に図示すると，中心の座標が $\boxed{\quad ウ \quad}$，半径が $\boxed{\quad エ \quad}$ の円となる．

以下では，p は $-\dfrac{1}{2}\leqq p\leqq 3$ の範囲を動くとする．

(2) α のとりうる値の範囲は $\boxed{\quad オ \quad}$ である．また，β のとりうる値の範囲は $\boxed{\quad カ \quad}$ である．

(3) $2\alpha-\beta$ のとりうる値の範囲は $\boxed{\quad キ \quad}$ である．

解答

ア $2p+1$　イ $2(p^2-p-1)$　ウ $(2,\ 2)$　エ 3　オ $-1\leqq\alpha\leqq 2$　カ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq\beta\leqq 5$　キ $2-3\sqrt{5}\leqq 2\alpha-\beta\leqq -1$

解説

(1) 解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\boldsymbol{2p+1}\cdots① \\ \alpha\beta=\boldsymbol{2p^2-2p-2}\cdots②\end{cases}$$

①より，$p=\dfrac{\alpha+\beta-1}{2}$ を得るので，②に代入することにより

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=2\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)^2-2\frac{\alpha+\beta-1}{2}-2\\&=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha-2\beta+1)-\alpha-\beta+1-2\\&=\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2+\alpha\beta-2\alpha-2\beta-\frac{1}{2}\\\iff&\ \alpha^2+\beta^2-4\alpha-4\beta-1=0\end{aligned}$$

つまり，$(\alpha-2)^2+(\beta-2)^2=9$ を得るので，中心の座標が $\mathbf{(2,\ 2)}$，半径が $\mathbf{3}$ の円となる．

(2) ②は，$\alpha\beta=2\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}$ と変形できることから，$-\dfrac{1}{2}\leqq p\leqq 3$ のとき，①，② より

$$\begin{cases}0\leqq\alpha+\beta\leqq 7\\ -\dfrac{5}{2}\leqq\alpha\beta\leqq 10\end{cases}$$

を得る．

$\alpha+\beta=0$ と $(\alpha-2)^2+(\beta-2)^2=9$ の交点は

$$(\alpha-2)^2+(-\alpha-2)^2=9\iff 2\alpha^2=1\iff\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

であることから，$\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$（複号同順）である．ここで $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ とおく．

$\alpha+\beta=7$ と $(\alpha-2)^2+(\beta-2)^2=9$ の交点は

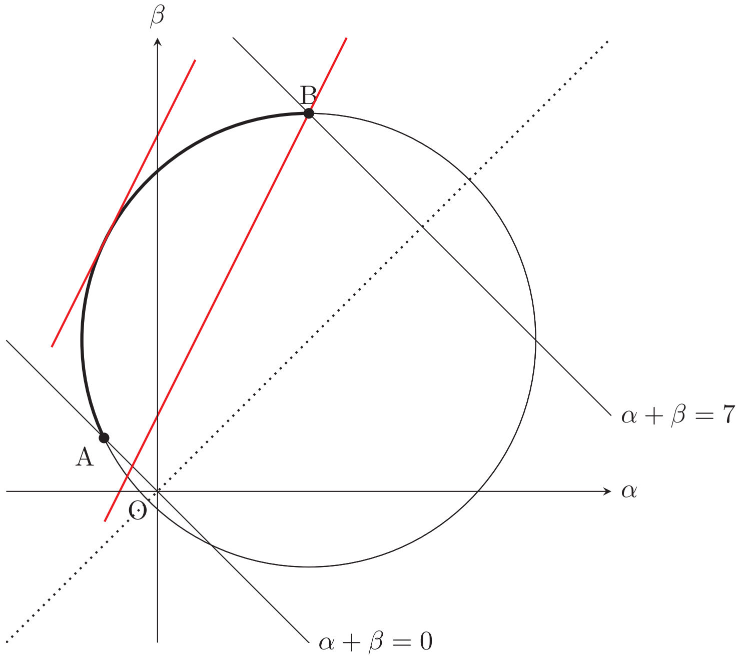
$$(\alpha-2)^2+(-\alpha+5)^2=9 \iff 2\alpha^2-14\alpha+20=0 \iff 2(\alpha-2)(\alpha-5)=0 \iff \alpha=2,\ 5$$

であることから，$(2,\ 5)$, $(5,\ 2)$ である．ここで $\mathrm{B}(2,\ 5)$ とおく．

$\alpha<\beta$ であることを考慮すると，$0\leqq\alpha+\beta\leqq 7$ を満たすとき，点 $(\alpha,\ \beta)$ は下図の太線部分を動くことがわかる．よって，α, β のとりうる値の範囲はそれぞれ

$$\boldsymbol{-1\leqq\alpha\leqq 2,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq\beta\leqq 5}$$

となる．（この範囲はいずれも $-\dfrac{5}{2}\leqq\alpha\beta\leqq 10$ を満たしている）



(3)　$2\alpha-\beta=k$ とすると，$\beta=2\alpha-k$ であることから，傾き 2，β 切片が $-k$ の直線を表している．この直線が上図の太線部分と共有点をもつような k の値の範囲を考えればよい．β 切片が $-k$ であることに注意すると，$2\alpha-\beta$ が最大となるのは点 $\mathrm{B}(2,\ 5)$ を通るときであり，最小となるのは図の太線部分と接するときである．

$(2,\ 5)$ を通るとき

$$k=2\cdot 2-5=-1$$

である．$\beta=2\alpha-k$ が $(\alpha-2)^2+(\beta-2)^2=9$ に接するのは，$2\alpha-\beta-k=0$ と円の中心 $(2,\ 2)$ との距離が円の半径と一致するときなので，

$$\frac{|4-2-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=3 \iff k=2\pm 3\sqrt{5}$$

を得る．つまり最小となるときの k の値は $k=2-3\sqrt{5}$ である．以上より求める範囲は，

$$\boldsymbol{2-3\sqrt{5}\leqq 2\alpha-\beta\leqq -1}$$

である．

講評

1.［数列］（やや難）

和が先に与えられているタイプの漸化式の問題であった．誘導に従って解き進めればよいが，計算が繁雑で，合わせきるのは難しかったかもしれない．漸化式から導かれるシグマが $k=2$ から始まるところも注意が必要である．

2.［整数］（やや難）

与えられた値が最小公倍数となるような自然数の組の個数を考える問題であった．枠ア，ウは落とせないが，枠イ，エはやや難しい．特に，枠エは (2) の誘導の結果をそのままは使えないので注意が必要である．

3.［三角関数，2 次方程式］（やや難）

三角関数を含む方程式を 2 次方程式に言い換えて，解の個数を調べる問題であった．x と θ の個数の対応関係は典型的なものであるが，慎重に調べないといけない設定になっている．空所補充で部分点がないだけに，正解するのは簡単ではないだろう．

4.［確率］（難）

(1) では全部の指定の仕方の 3^6 を全事象として，適合する指定の仕方が何通りあるかを数えるのがよい．その場合，数字を並べて偶数になる場合の数の考え方と同じように，制約のきついところから考えていくことになる．(2), (3) では確率の積を用いる解答を載せた．指定が自由なところを確率 1 と考えれば，場合の数の総数を考慮する必要がないからである．

5.［2 次方程式，図形と式］（やや難）

(1) の 2 次方程式の解と係数の関係，円の方程式などは穏やかな難易度だが，(2) 以降は，得られた円のどの部分が題意を満たすのかを把握するのが難しかったであろう．

昨年度は，それ以前に比べるとだいぶ難易度が上がったのだが，本年度はさらにそれを上回る難易度となっている．大問 1，2，3，5 それぞれの前半など比較的平易なところを正確に埋められるかどうかがポイントとなるだろう．制限時間が 60 分と短いことも考慮して，目標点は 35% .