

## 近畿大学医学部(後期) 数学

2025年 2月 22日実施



解説動画公開中!!

<https://youtu.be/kR5LMxwT8UI>

**1** 3以上の自然数  $n$  に対して、 $x$  の多項式

$$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n)$$

の展開を考える。次の問いに答えよ。

- (1)  $x^n$  の係数を求めよ。
- (2) 定数項を求めよ。
- (3)  $x^{n-1}$  の係数を求めよ。
- (4)  $x^{n-2}$  の係数を求めよ。
- (5)  $x^{n-3}$  の係数を求めよ。

**解答**

(1) 1 (2)  $n!$  (3)  $\frac{1}{2}n(n+1)$  (4)  $\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$  (5)  $\frac{1}{48}n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)$

**解説**

$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n)$  とする。

- (1)  $f(x)$  の  $n$  個の因数全てから  $x$  の項を選んで積を作ることによって  $x^n$  の項が現れるので、 $f(x)$  の  $x^n$  の係数は 1 である。
- (2)  $f(x)$  の  $n$  個の因数全てから定数項を選んで積を作ることになるので、 $f(x)$  の定数項は  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$  である。
- (3)  $f(x)$  の  $n$  個の因数のうち、1箇所だけ定数項を選び、残りの  $n-1$  箇所からは  $x$  の項を選んで積を作ることによって  $x^{n-1}$  の項が現れる。よって、 $f(x)$  の  $x^{n-1}$  の係数は、

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

- (4)  $f(x)$  の  $n$  個の因数のうち、2 箇所だけ定数項を選び、残りの  $n-2$  箇所からは  $x$  の項を選んで積を作ることによって  $x^{n-2}$  の項が現れる。よって、 $f(x)$  の  $x^{n-2}$  の係数を  $T_n$  とすると、 $T_n$  は表の太枠内の和なので、(表全体の和) から (灰色部分の和) を引いて  $\frac{1}{2}$  倍すればよい。

	1	2	3	...	$n-1$	$n$
1	1 · 1	1 · 2	1 · 3	...		1 · $n$
2	2 · 1	2 · 2	2 · 3	...		2 · $n$
3	3 · 1	3 · 2	3 · 3	...		3 · $n$
...	...	...	...	...	...	...
$n-1$	$(n-1) \cdot 1$	$(n-1) \cdot 2$	$(n-1) \cdot 3$	...		$(n-1) \cdot n$
$n$	$n \cdot 1$	$n \cdot 2$	$n \cdot 3$	...		$n \cdot n$

(表全体の和)  
 = (1 行目の和) + (2 行目の和) + ... + (n 行目の和)  
 =  $1(1+2+\dots+n) + 2(1+2+\dots+n) + \dots + n(1+2+\dots+n)$   
 =  $(1+2+\dots+n)^2$   
 =  $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

よって、

$$T_n = \left\{ \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \right\} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$$

**別解**

表の太枠内の各列を足したものの和をとると考える (先に縦に足し合わせたものをシグマ計算する) と

$$\sum_{l=2}^n \left( l \sum_{k=1}^{l-1} k \right) = \sum_{l=2}^n l \frac{(l-1)l}{2}$$

$$= \sum_{l=2}^n \left( \frac{l^3}{2} - \frac{l^2}{2} \right)$$

$$= \sum_{l=1}^n \left( \frac{l^3}{2} - \frac{l^2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{6} (n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$$

- (5)  $\{1, 2, \dots, n\}$  から異なる 3 数  $i, j, k$  を選び、その積  $ijk$  をすべての選び方について足し合わせてできる数を  $S_{i,j,k}$   $\left( = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} ijk \right)$  と書くことにする。  $x^{n-3}$  の係数は  $S_{i,j,k}$  に等しい。

また  $\{1, 2, \dots, n\}$  から異なる 2 数  $i, j$  ( $i < j$ ) を選び、その積  $i^2j$  および  $ij^2$  をすべての選び方について

足し合わせてできる数を  $S_{i,j}$   $\left( = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i^2j + ij^2) = \sum_{i \neq j} i^2j \right)$  と書くことにする。

さらに  $\sum_{i=1}^n i = S_1, \sum_{i=1}^n i^2 = S_2, \sum_{i=1}^n i^3 = S_3$  とおく。  $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}, S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ である.}$$

次の式の左辺の展開を考えると右辺になることがわかる.

$$(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)(1 + 2 + \cdots + n) = S_3 + S_{i,j}$$

したがって  $S_2S_1 = S_3 + S_{i,j}$  つまり  $S_{i,j} = S_2S_1 - S_3$  である. また, 次の式の左辺の展開を考えると右辺になることがわかる.

$$(1 + 2 + \cdots + n)(1 + 2 + \cdots + n)(1 + 2 + \cdots + n) = S_3 + 3S_{i,j} + 6S_{i,j,k}$$

したがって  $S_1^3 = S_3 + 3S_{i,j} + 6S_{i,j,k}$ , つまり

$$\begin{aligned} 6S_{i,j,k} &= S_1^3 - S_3 - 3S_{i,j} \\ &= S_1^3 - S_3 - 3(S_2S_1 - S_3) \\ &= S_1^3 + 2S_3 - 3S_2S_1 \\ &= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^3 + 2 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{8} \{n(n+1) + 4 - 2(2n+1)\} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{8} (n^2 - 3n + 2) \\ &= \frac{1}{8} n^2 (n+1)^2 (n-1)(n-2) \end{aligned}$$

求める答えは  $S_{i,j,k} = \frac{1}{48} n^2 (n+1)^2 (n-1)(n-2)$  である.

**別解**

$1 \leq i < j < k \leq n$  である 3 数のうち最も大きい  $k$  ( $3 \leq k \leq n$ ) を決めると,  $\{1, 2, \dots, k-1\}$  から取った異なる  $i, j$  の積の総和は (4) の答えに  $n = k-1$  を代入して  $\frac{1}{24} (k-2)(k-1)k(3k-1)$  であることがわかる

従って求める答  $S_{i,j,k}$  は

$$\begin{aligned}
 S_{i,j,k} &= \sum_{k=3}^n k \cdot \frac{1}{24} (k-2)(k-1)k(3k-1) \\
 &= \frac{1}{24} \sum_{k=1}^n (k-2)(k-1)k^2(3k-1) \quad (k=1 \text{ から足しても同じ}) \\
 &= \frac{1}{24} \sum_{k=1}^n (k-2)(k-1)k \{3(k+1)(k+2) - 10(k+1) + 4\} \\
 &= \frac{1}{24} \sum_{k=1}^n \{3(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2) - 10(k-2)(k-1)k(k+1) + 4(k-2)(k-1)k\} \\
 &= \frac{1}{24} \left\{ \frac{3}{6} (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{10}{5} (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{4} (n-2)(n-1)n(n+1) \right\} \\
 &= \frac{1}{48} (n-2)(n-1)n(n+1) \{(n+2)(n+3) - 4(n+2) + 2\} \\
 &= \frac{1}{48} (n-2)(n-1)n(n+1)(n^2+n) \\
 &= \frac{1}{48} (n-2)(n-1)n^2(n+1)^2
 \end{aligned}$$

**2** 半径 4 の円に内接する  $\triangle ABC$  が  $\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4$  を満たしている。このとき、 $\cos A =$  **ア** であり、 $BC =$  **イ** である。また、 $\triangle ABC$  の面積は **ウ** であり、 $\triangle ABC$  の内接円の半径は **エ** である。 $\angle A$  の二等分線と辺  $BC$  との交点を  $D$  とすると、 $\triangle ABD$  の面積は、**オ** であり、 $AD =$  **カ** である。

**解答**

ア  $\frac{1}{8}$     イ  $3\sqrt{7}$     ウ  $\frac{105\sqrt{7}}{16}$     エ  $\frac{7}{4}$     オ  $\frac{35\sqrt{7}}{12}$     カ  $\frac{5\sqrt{7}}{3}$

**解説**

$BC = a, CA = b, AB = c$  とし、外接円の半径を  $R$  とする。正弦定理から  $\frac{a}{\sin A} = 2R \iff \sin A = \frac{a}{2R}$  を得るので、

$$\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4 \iff a : b : c = 6 : 5 : 4$$

がわかる。 $a = 6k, b = 5k, c = 4k (k > 0)$  とおくことができるので、 $\triangle ABC$  に余弦定理を用いることにより、

$$\cos A = \frac{16k^2 + 25k^2 - 36k^2}{2 \cdot 4k \cdot 5k} = \frac{1}{8}$$

また、 $0 < A < \pi$  のもとで、 $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

であるので、正弦定理から

$$2 \cdot 4 = \frac{a}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} \iff a (= BC) = 3\sqrt{7}$$

したがって、 $k = \frac{\sqrt{7}}{2}, b = \frac{5\sqrt{7}}{2}, c = 2\sqrt{7}$  が得られる。 $\triangle ABC$  の面積は

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{105\sqrt{7}}{16}$$

内接円の半径を  $r$  とすると、 $S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$  であるので、

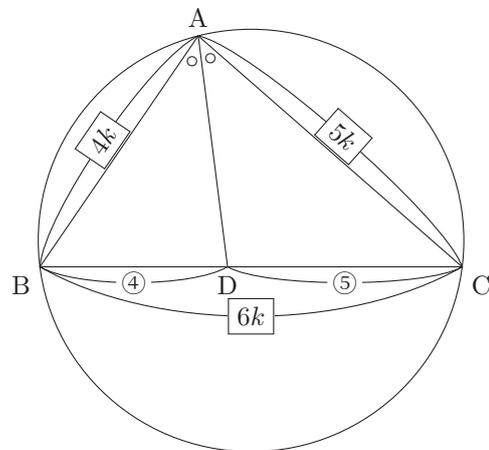
$$\frac{105\sqrt{7}}{16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15\sqrt{7}}{2}r \iff r = \frac{7}{4}$$

角の二等分線の性質より、 $BD : DC = AB : AC = 4 : 5$  であるので、 $\triangle ABD$  の面積は  $\triangle ABC$  の面積の  $\frac{4}{9}$  倍である。

したがって  $\triangle ABD$  の面積は  $\frac{4}{9} \cdot \frac{105\sqrt{7}}{16} = \frac{35\sqrt{7}}{12}$ 。

$\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{8}$  であることから、 $\sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$  を得る。 $\triangle ABD$  の面積を考えることにより、

$$\frac{35\sqrt{7}}{12} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot AD \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \iff AD = \frac{5\sqrt{7}}{3}$$



別解 1

$$\cos B = \frac{16k^2 + 36k^2 - 25k^2}{2 \cdot 4k \cdot 6k} = \frac{9}{16} \text{ であるので, } \triangle ABD \text{ に余弦定理を用いて,}$$

$$AD^2 = 28 + \frac{112}{9} - 2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot \frac{4\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{175}{9}$$

であることから  $AD = \frac{5\sqrt{7}}{3}$ .

別解 2

$\vec{AB} = \vec{b}$ ,  $\vec{AC} = \vec{c}$  とおくと,

$$|\vec{b}| = 2\sqrt{7}, |\vec{c}| = \frac{5\sqrt{7}}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = 2\sqrt{7} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{35}{8}$$

であり,  $\vec{AD} = \frac{5\vec{b} + 4\vec{c}}{9}$  であるので,

$$|\vec{AD}|^2 = \frac{1}{81}(25|\vec{b}|^2 + 40\vec{b} \cdot \vec{c} + 16|\vec{c}|^2) = \frac{1}{81}(700 + 175 + 700) = \frac{175}{9}$$

であることから  $AD = \frac{5\sqrt{7}}{3}$ .

注釈

一般に  $\triangle ABC$  において  $\angle A$  の二等分線と辺  $BC$  の交点を  $D$  とし,  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BD = m$ ,  $CD = n$  とすると  $AD = \sqrt{bc - mn}$  が成り立つ. いまの場合,

$$AB = c = 2\sqrt{7}, AC = b = \frac{5\sqrt{7}}{2}, BD = m = \frac{4\sqrt{7}}{3}, CD = n = \frac{5\sqrt{7}}{3}$$

であるから,  $AD = \sqrt{\frac{5\sqrt{7}}{2} \cdot 2\sqrt{7} - \frac{4\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{3}} = \frac{5\sqrt{7}}{3}$  である.

**3** 3次関数  $f(x) = x^3 + 3x^2 + (m+3)x$  が極値をもつとき、次の問いに答えよ。

- (1) 定数  $m$  の値の範囲を求めよ。
- (2)  $y = f(x)$  の傾きが  $m$  である接線を  $l_1$  とする。  $l_1$  の方程式、およびその接点 A の座標を  $m$  を用いて表せ。
- (3) 点 A において  $l_1$  と直交する直線を  $l_2$  とする。  $y = f(x)$  と  $l_2$  との交点のうち  $x$  座標の最も小さい点の  $x$  座標を  $\alpha$  とするとき、  $\alpha$  の最大値とそのときの  $m$  の値を求めよ。

**解答**

- (1)  $f'(x) = 0$  が異なる 2 つの実数解をもてばよいので、  $f'(x) = 3x^2 + 6x + m + 3 = 0$  の判別式を  $D_1$  として  $D_1 > 0$  ならよい。

$$\frac{D_1}{4} = 3^2 - 3(m+3) > 0 \iff m < 0$$

- (2) 接線の傾きが  $m$  となる点の  $x$  座標を  $x = t$  とすると、  $f'(t) = 3t^2 + 6t + m + 3 = m$  より  $t = -1$  となるので、接点 A の座標は  $A(-1, -m - 1)$  であり、接線  $l_1$  の方程式は  $l_1: y = m(x+1) - m - 1$  を整理して  $y = mx - 1$  である。

- (3) (1) の条件のもとで、直線  $l_2$  の方程式は  $l_2: y = -\frac{1}{m}(x+1) - m - 1 = -\frac{1}{m}x - m - \frac{1}{m} - 1$  となる。これと  $y = f(x)$  の交点の  $x$  座標は

$$x^3 + 3x^2 + (m+3)x = -\frac{1}{m}x - m - \frac{1}{m} - 1 \iff (x+1) \left( x^2 + 2x + m + \frac{1}{m} + 1 \right) = 0 \dots \textcircled{1}$$

の解である。ここで、  $g(x) = x^2 + 2x + m + \frac{1}{m} + 1$  とおくと、

$$g(x) = (x+1)^2 + m + \frac{1}{m} = 0 \iff (x+1)^2 = -m - \frac{1}{m} \iff x = -1 \pm \sqrt{-m - \frac{1}{m}}$$

となる。ここで (1) より  $m < 0$  であるから、これらは異なる 2 つの実数である。また、これより  $f(x) = 0$  の異なる 3 つの実数解の大小関係もわかり、  $\alpha = -1 - \sqrt{-m - \frac{1}{m}}$  となる。  $m < 0$  より  $-m > 0$ 、  $-\frac{1}{m} > 0$  なので相加平均・相乗平均の関係を用いると、

$$\begin{aligned} \alpha &= -1 - \sqrt{-m - \frac{1}{m}} \\ &\leq -1 - \sqrt{2\sqrt{(-m) \cdot \left(-\frac{1}{m}\right)}} \\ &= -1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

がわかる。ここで等号は  $-m = -\frac{1}{m}$  のときで、  $m < 0$  を考慮すると  $m = -1$  のときに成立するので、  $\alpha$  の最大値は  $-1 - \sqrt{2}$ 、そのときの  $m$  の値は  $-1$  である。

講評

1 [数列] (易～難)

整式の展開係数について考える問題。(3)までは落とせない。(4)は解いた経験の有無で差がつくだろうが、できた受験生も多いだろう。(5)は(4)の応用である。 $\left(\sum_{k=1}^n k\right)^3$ から不適なものを除く、という方針がわかりやすいだろうが、時間内に正解を導くのは難しいだろう。

2 [図形と計量] (やや易)

三角形の計量に関する基本的な設問であった。正弦定理、余弦定理、面積公式や、角の二等分線の性質などを利用する問題である。計算ミスに注意しながらできるだけ完答を目指したい。

3 [数学Ⅱの微積分] (やや易～標準)

3次関数の接線や3次方程式の解に関する問題であった。基本的な作業がしっかりできれば難しくはない。(1)(2)は確実に完答したい。(3)はしっかりとした記述が求められるが、できるだけ完答を目指したい。

昨年度から、後期試験のみが医学部独自の問題となった。1の(5)の難易度が高いが、それ以外は易～標準の難易度である。昨年度は例年より易しめだったが、今年度はそれよりさらに得点しやすい問題の割合が多い。

一次合格の目標は85%。

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ

メルマガ無料登録で全教科配信！ 本解答速報の内容に関するお問合せは… メビオ ☎0120-146-156 まで

医学部進学予備校

# メビオ

☎0120-146-156 <https://www.mebio.co.jp/>



医学部専門予備校  
英進館メビオ 福岡校

☎03-3370-0410  
<https://yms.ne.jp/>

☎0120-192-215  
<https://www.mebio-eishinkan.com/>



登録はこちらから

## 2泊3日無料体験

寮・授業・食堂を無料で体験

	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00	21:00
タイムスケジュール		朝食	授業(数学)	授業(英語)	昼食	授業(理科1)	授業(理科2)	自習室で課題演習(質問可)	夕食	自習室で課題演習(質問可)				
1日目							面接・入室		学力診断テスト(英語)	夕食	学力診断テスト(数学)	学力診断テスト(適性)		
2日目		朝食	授業(数学)	授業(英語)	昼食	授業(理科1)	授業(理科2)	自習室で課題演習(質問可)	夕食	自習室で課題演習(質問可)				
3日目	朝食	課題提出テスト	授業(数学)	課題提出テスト	授業(英語)	昼食	面接・学習アドバイス							

**無料体験期間**

- ①2/ 9(日)～2/11(火)
- ②2/16(日)～2/18(火)
- ③2/23(日)～2/25(火)
- ④3/ 2(日)～3/ 4(火)
- ⑤3/ 9(日)～3/11(火)

詳細やお申込はこちらから



詳しくはこちら

医学部進学予備校

# メビオ

☎0120-146-156

校舎にて個別説明会も随時開催しています。  
【受付時間】9:00～21:00(土日祝可)

大阪府大阪市中央区石町2-3-12 ベルヴォア天満橋  
天満橋駅(京阪/大阪メトロ谷町線)より徒歩3分